(1)

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE NICE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE SPECIALITE EN MATHEMATIQUES

par

Dany-Jack MERCIER

THEOREMES DE REGULARITE DU TYPE NILSSON

Soutenue le 14 Juin 1984 devant le Jury :

MM. F. PHAM (Président du Jury)

J. DAMON

A. GALLIGO

M. GRANGER

THESE

présentée à
l'Université de NICE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE SPECIALITE EN MATHEMATIQUES

par

Dany-Jack MERCIER

"THEOREMES DE REGULARITE DU TYPE NILSSON"

Soutenue le 14 juin 1984 devant le Jury :

M. Frédéric PHAM (Président du Jury)	Univ. de Nice
M. James Norman DAMON	Univ. of North Carolina
M. André GALLIGO	Univ. de Nice
M. Michel GRANGER	Univ. d'Angers

RESUME :

On démontre un Théorème de Régularité sous la forme suivante : «Soient $\pi : X \to T$ une application analytique entre deux variétés analytiques complexes connexes et Y une hypersurface analytique de X. Il existe un sous-ensemble analytique Σ de T distinct de T et tel que, si h(t) désigne une classe d'homologie de degré p de la fibre $\pi^{-1}(t) \cap (X \setminus Y)$ dépendant continûment de t lorsque t varie dans un ouvert simplement connexe de $T \setminus \Sigma$, l'intégration de toute p-forme différentielle multiforme ω relative fermée et de classe de Nilsson sur $X \setminus Y$ donne une fonction $f(t) = \int_{h(t)} \omega$ de classe de Nilsson sur $T \setminus \Sigma$ », dans chacun des trois cas suivants :

I) π est propre (Théorème 3.1)

II) $\pi : U \to C$ où U est un ouvert de C, la situation étant locale à la source et moyennant une hypothèse supplémentaire (H) (Théorème 3.2)

III) Situation semblable à II) mais en prenant des classes d'homologie relative. Avec des hypothèses plus fortes, on obtient alors des microfonctions de classe de Nilsson (Théorème 3.3.2).

La croissance modérée est montrée par une méthode géométrique et en utilisant le Théorème de désingularisation de Hironaka.

MOTS-CLES :

Classe de Nilsson - Croissance modérée - Intégration de formes différentielles.

PLAN :

Avant - Propos :

Je tiens à remercier A. Galligo qui a dirigé mon travail de recherche et a toujours su faire preuve d'intérêt envers mes sujets de préoccupation.

Je remercie vivement F. Pham qui a bien voulu présider mon Jury et dont les idées exposées dans son cours de Hanoï ont joué un rôle essentiel.

Merci aussi à J-E Björk par qui tout a commencé voilà trois ans maintenant, et à Lê Dũng Tráng pour deux entrevues brèves mais efficaces.

Je n'oublierai pas M. Granger et J. Briançon qui ont toujours pris la peine de m'écouter et avec qui le dialogue s'est toujours avéré fructueux. Une attention particulière à P. Maisonobe qui n'a pas hésité à me faire un cours détaillé de géométrie analytique complexe pendant plus d'une année, pour le plaisir.

Je remercie J. Damon d'avoir bien voulu faire partie de mon Jury après avoir consciencieusement écouté la totalité de mon travail. Ses remarques ont toujours été judicieuses.

Je terminerai cette liste non exhaustive par une pensée émue à mon professeur de Terminale, Mme J. Manotte, qui a su faire naître en moi le désir de continuer à étudier en mathématiques.

Introduction :

La notion de fonction analytique multiforme de détermination finie et à croissance modérée, appelée encore fonction de la classe de Nilsson (Définition 2.1.10) n'est pas récente. Ces fonctions interviennent très tôt dans la description des solutions d'une équation différentielle de la forme :

$$w^{(\mu)} + a_1(z)\, w^{(\mu-1)} + \dots + a_\mu(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

où les a_i désignent des fonctions méromorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soient $1 \leq i \leq \mu$ fixé et z_0 un des pôles de a_i. FUCHS a montré que les solutions de l'équation (1) sont des fonctions analytiques multiformes à croissance modérée au voisinage de z_0 si et seulement si z_0 est un point singulier régulier de cette équation, ie si l'ordre du pôle z_0 est inférieur ou égal à i.
Actuellement, la recherche de résultats plus généraux rend nécessaire l'utilisation de tout l'arsenal de la topologie algébrique et de la géométrie analytique ([DEL])

Cette notion apparaît aussi dans l'étude des intégrales de la forme :

$$f(t) = \int_{\gamma(t)} \omega(t) \qquad (2)$$

où l'on intègre une forme différentielle sur un cycle d'une variété lisse.
Ce type d'intégrales a été étudié dès le début du siècle par PICARD et SIMART grâce à des considérations de topologie, d'analysis situs comme on disait à l'époque ([PIC], [LEF]), puis par LERAY ([LER] articles I et III). Signalons enfin qu'une classe importante d'intégrales de ce type, les intégrales de FEYNMAN, interviennent en électrodynamique quantique ([HWA], [PHA 3])

L'un des problèmes soulevés par les intégrales du type (2) est un problème de régularité :
"Peut-on dire que l'intégration d'une forme différentielle $\omega(t)$ de classe de Nilsson (cf Définition 2.1.10) le long d'un cycle $\gamma(t)$ se déformant continûment avec t donne une fonction $f(t)$ qui est encore de classe de Nilsson sur un sous-ensemble convenable de l'espace des paramètres t ?"

D'une façon générale, les Théorèmes de régularité sont montrés dans l'un des deux points de vue suivants :

- Sans utiliser le Théorème de désingularisation (cf 0.4) : voir les travaux de NILSSON et GRIFFITHS ([NIL 1], [NIL 2], [GRI], [BJO 2], [FAT]) qui sont cependant faits dans le cas algébrique,
- En se permettant d'utiliser le Théorème de désingularisation : voir [DEL].

Citons aussi MALGRANGE qui donne une preuve dans chacune de ces optiques en se plaçant dans la situation de Milnor ([MAL])

Le but de cette thèse est de démontrer des Théorèmes de régularité du type suivant en se permettant l'utilisation du Théorème de désingularisation :

Théorème de régularité : "Soient $\pi : X \to T$ une application analytique (propre) entre deux variétés analytiques complexes connexes et Y une hypersurface analytique de X. Il existe un sous-ensemble analytique Σ de T distinct de T et tel que, si $\tilde{h}(t)$ désigne une classe d'homologie de degré p de la fibre $\tilde{X}^*_t = (\pi \circ q)^{-1}(t)$ (où $q : \tilde{X}^* \to X^*$ désigne le revêtement universel de $X^* = X \setminus Y$) dépendant continûment de t lorsque t varie dans un ouvert simplement connexe de $T \setminus \Sigma$, l'intégration de toute p-forme différentielle multiforme ω sur X^* relative, fermée et de classe de Nilsson sur X^* (ie d'une forme différentielle $\tilde{\omega}$ sur $\tilde{X}^*$ associée, voir 1.3.3) donne une fonction $f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega}$ qui est de classe de Nilsson sur $T \setminus \Sigma$."

On montrera la croissance modérée (cf 3.1) en utilisant une méthode géométrique proposée par F. PHAM dans son cours de Hanoï ([PHA 4]). L'utilisation du Théorème de désingularisation permet une approche "élémentaire" du problème

difficile de la croissance modérée. Tous les principaux ingré-dients sont rassemblés dans le chapitre 0 et permettent d'écri-re un exposé "self-contained".

La méthode permet de traiter les trois situations suivantes :

I) $\pi : X \to T$ est propre, X et T désignant des variétés analytiques complexes connexes (Théorème 3.1).

II) $\pi : U \to \mathbb{C}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, la situation étant locale à la source ie on se restreint à une boule ouverte X de U assez petite et l'on choisit des classes d'homologie $\tilde{h}(t)$ des fibres $\tilde{X}^*_t$ où $\tilde{X}^* = q^{-1}(X^*)$ et $q : \tilde{U}^* \to U^*$ désigne le revêtement universel de $U^* = U \setminus Y$. Le Théorème de régularité est alors montré avec l'hypothèse supplémentaire (H) : " Il existe une stratification de Whitney $\{A_\alpha\}_\alpha$ de la paire (U, Y) telle que, si $\beta : U' \to U$ désigne la désingularisation de l'hypersurface Y dans U, les "images inverses" des strates A_α s'envoient submersivement (par β) sur ces strates A_α ". (Théorème 3.2)

III) On conserve les hypothèses du cas II mais, en notant $\bar{X}$ l'adhérence de X et ∂X son bord, on prend des classes d'homologie relative $h(t)$ de $\pi^{-1}(t) \cap \bar{X}$ modulo le bord $\pi^{-1}(t) \cap \partial X$. Si l'on se place, en outre, dans les hypothèses fortes suivantes : 0 est un point singulier isolé de π et ω est une forme différentielle holomorphe sur tout U, on peut définir un germe de microfonction $f(t) = \int_{h(t)} \omega$ en 0 (cf. Proposition 3.3.1)
On obtient finalement un Théorème de régularité (Théorè-me 3.3.2) en montrant la croissance modérée de la même façon qu'en II.

Contenu des Chapitres :

* Dans le chapitre 1, on définit les objets avec lesquels on travaille et l'on montre que $f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega}$ est une fonction analytique multiforme de détermination finie dès que ω l'est.

* Le chapitre 2 rappelle la définition de la croissance modérée ainsi que certains résultats concernant la détermination finie et la croissance modérée. Enfin, la section 2.3 donne un critère de croissance modérée que nous permettra de nous restreindre au cas où la variété T est de dimension complexe 1 dans la démonstration du Théorème 3.1.

* Le chapitre 3 contient les démonstrations des Théorèmes de régularité dans les cas I, II et III.

* L'appendice explicite les points délicats de la preuve du Théorème de Fibration du type Milnor selon Lê. Ce Théorème joue un rôle crucial dans les cas II et III et montre qu'il est inutile d'introduire d'autres hypothèses que (H) dans les énoncés des Théorèmes 3.2 et 3.3.2.

Chapitre 0 : Rappels

0.1 Construction du faisceau d'homologie de X sur T

0.1.1 Définition :

Soit $\pi : X \to T$ une submersion entre 2 variétés différentielles réelles. Notons r la dimension de T et $X_P = \pi^{-1}(P)$ pour tout sous-ensemble P de T. Le p-ième faisceau d'homologie de X sur T, noté $H_p(X/T)$, est le faisceau associé au préfaisceau :

$$U \Subset T \rightsquigarrow H_{p+r}(X, X_{T \setminus U})$$

La proposition suivante montre que la fibre du faisceau $H_p(X/T)$ au dessous du point t de T est exactement le p-ième groupe d'homologie $H_p(X_t)$ de la fibre $X_t = \pi^{-1}(t)$:

0.1.2 Proposition :

Soit $\pi : X \to T$ une submersion entre 2 variétés différentielles réelles. Pour tout point t de T on a les isomorphismes suivants des groupes d'homologie à coefficients entiers :

$$\varinjlim_{t \in U} H_{p+r}(X, X_{T \setminus U}) \simeq H_{p+r}(X, X_{T \setminus \{t\}}) \simeq H_p(X_t)$$

où $r = \dim T$ et $p \in \mathbb{N}$.

preuve :

__lemme__ : Si (A, B) est une paire d'espaces topologiques et si $\{A_i\}$ (resp. $\{B_i\}$) est une suite croissante de sous-ensembles de A (resp. de B) telle que $A_i \supset B_i$ pour tout i et $\bigcup \mathring{A}_i = A$ (resp. $\bigcup \mathring{B}_i = B$), alors $H_*(A, B) = \varinjlim_i H_*(A_i, B_i)$.

En effet, si $C_p(A, B)$ désigne le groupe des p-chaines relatives, on a $C_p(A, B) = \varinjlim C_p(A_i, B_i)$ et comme le foncteur homo-logie commute avec la limite inductive, on obtient bien $H_p(A, B) = \varinjlim H_p(A_i, B_i)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Ce lemme appliqué aux paires $(X, X_{T \setminus U}) \subset (X, X_{T \setminus \{t\}})$ donne immédiatement l'isomorphisme :

$$\varinjlim H_{p+r}(X, X_{T \setminus U}) = H_{p+r}(X, X_{T \setminus \{t\}})$$

Comme π est une submersion, chaque fibre X_t de π est une sous-variété de X et l'on peut construire une suite croissante d'ouverts relativements compacts K_i de X_t telle que $X_t = \bigcup K_i$.
Le lemme précédent appliqué aux paires $(K_i, \emptyset) \subset (X_t, \emptyset)$ donne :

$$(1) \qquad H_p(X_t) = \varinjlim H_p(K_i)$$

Le lemme 0.1.3 montre l'existence d'une suite décroissante de voisinages ouverts de t, notée $\{U_i\}$, et d'une suite $\{L_i\}$ de voisinages ouverts de K_i dans X, telles que :

(a) Pour tout i, $\pi : L_i \to U_i$ est un fibré trivial de fibre K_i

(b) $\{t\} = \bigcap_i U_i$

(c) $i < j \Rightarrow U_j \subset U_i$ et $L_i|_{U_j} \subset L_j$

Soit U'_i une boule légèrement plus petite que U_i. Le lemme appliqué aux paires $(L_i \cup X_{T\setminus U'_i}, X_{T\setminus U'_i}) \subset (X, X_{T\setminus\{t\}})$ donne :

$$H_{p+n}(X, X_{T\setminus\{t\}}) = \varinjlim H_{p+n}(L_i \cup X_{T\setminus U'_i}, X_{T\setminus U'_i})$$

d'où, par excision de $X_{T\setminus U_i} \cup (X_{U_i\setminus U'_i} \setminus L_i)$:

$$= \varinjlim H_{p+n}(L_i, L_i \cap \pi^{-1}(U_i \setminus U'_i))$$

$$= \varinjlim H_{p+n}(K_i \times U_i, K_i \times (U_i \setminus U'_i))$$

puisque $L_i = K_i \times U_i$ est un produit direct.

Mais $(U_i, U_i \setminus U_i')$ est de même type homotopique que (B^n, S^{n-1}) où B^n désigne la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et S^{n-1} son bord. Ainsi :

$$H_{p+n}(X, X_{T\setminus\{t\}}) = \varinjlim H_{p+n}(K_i \times B^n, K_i \times S^{n-1})$$

et la formule de Künneth "relative" (cf [GRE] 29.16 p200) permet d'écrire :

$$H_{p+n}(K_i \times B^n, K_i \times S^{n-1}) = \sum_{i+j=p+n} H_i(K_i) \otimes H_j(B^n, S^{n-1}) \oplus \sum_{i+j=p+n-1} \mathrm{Tor}(H_i(K_i), H_j(B^n, S^{n-1}))$$

où $H_j(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } j = n \end{cases}$

Donc :

$H_{p+n}(X, X_{T\setminus\{t\}}) = \varinjlim H_p(K_i)$ et (1) permet de conclure.

CQFD

• On a utilisé le résultat suivant :

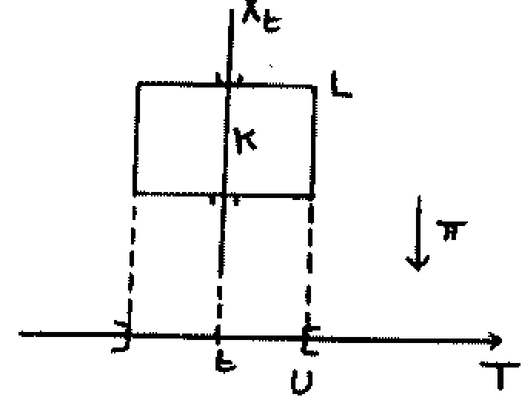
0.1.3 <u>lemme</u>

Soit $\pi : X \to T$ une submersion, $t \in T$ et K un ouvert relativement compact dans $X_t = \pi^{-1}(t)$. Il existe un voisinage ouvert L de K dans X et un voisinage ouvert U de t tels que $\pi : L \to U$ soit un fibré trivial de fibre K et de base U.

<u>Remarque</u> : Si $\pi : X \to T$ était une submersion propre, le lemme 0.1.3 serait le Théorème d'Ehresman et $\pi : X \to T$ une fibration C^∞ localement triviale. La démonstration de la Prop. 0.1.2 est alors simplifiée car il suffit de prendre $K_i = X_t$ et $L_i = \pi^{-1}(U_i)$. (voir [WOL])

<u>preuve du lemme 0.1.3</u> :

Le problème étant local dans T, on peut supposer que $t = 0$ et $T = \mathbb{R}^n$.



1°/ Cas où $T = \mathbb{R}$

On construit un champ de vecteurs V sur X qui se projette sur le champ uniforme $\frac{d}{dt}$ de T :

Pour tout $x \in \bar{K}$ il existe une carte (U_x, h_x) de X en x telle que l'application $\pi \circ h_x^{-1} : h_x(U) \longrightarrow T = \mathbb{R}$; $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1$ soit la première projection (cf. Théorème du rang).
$\frac{\partial}{\partial x_1}$ est un champ de vecteurs sur $h_x(U_x)$ que l'on transporte dans U_x grâce au difféomorphisme h_x. Il est clair que le champ $V_x = (h_x^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ vérifie $\pi_*(V_x) = \frac{d}{dt}$. On considère alors une partition C^∞ de l'unité $\{\psi_j\}_{j \in J}$ associée à un recouvrement (U_{x_j}, h_{x_j}) de X. Le champ lisse $V = \sum_{j \in J} \psi_j V_{x_j}$ de X vérifie $\pi_* V = \frac{d}{dt}$.

On intègre V : Il existe un groupe local de transformations à un paramètre dont la transformation infinitésimale est le champ de vecteurs V, soit $\{U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \varphi_t^{(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$ où

$$\begin{cases} U_\alpha \text{ est un ouvert de } X \\ \varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \\ \varphi_t^{(\alpha)} : U_\alpha \longrightarrow X \text{ est un difféomorphisme sur son image,} \end{cases}$$

vérifient les 4 propriétés standart :

(1) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de X

(2) l'application $]-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha[\times U_\alpha \longrightarrow X$, $(t, p) \longmapsto \varphi_t^{(\alpha)}(p)$ est C^∞.

(3) Si $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon_\alpha$ $\varphi_t^{(\alpha)} \circ \varphi_s^{(\alpha)}$ est définie sur U_α et l'on a $\varphi_t^{(\alpha)} \circ \varphi_s^{(\alpha)} = \varphi_{t+s}^{(\alpha)}$ sur U_α.

(4) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$ $\exists \varepsilon < \operatorname{Inf}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$ tel que : $|t| < \varepsilon \Rightarrow \varphi_t^{(\alpha)} = \varphi_t^{(\beta)}$ sur un voisinage de p.

(Les notations sont celles de [MAT])

Recouvrons le compact $\bar{K}$ par un nombre fini d'ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $\Lambda \subset A$, et prenons $\varepsilon = \operatorname{Inf}\{\varepsilon_\alpha / \alpha \in \Lambda\}$ et $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$

L'application $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \longrightarrow X$, $(t, p) \longmapsto \varphi_t^{(\alpha)}(p)$ si $p \in U_\alpha$ est définie et différentiable (cf. conditions (2) et (4))

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}]-\varepsilon,\varepsilon[\times K & \xrightarrow{\varphi} & X \\ (t,p) & \longmapsto & \varphi_t(p) = \varphi(t,p) \\ & \searrow^{pr_1} & \downarrow \pi \\ & &]-\varepsilon,\varepsilon[\end{array}$$

(diag. 1)

est commutatif puisque :
$\forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[\quad \forall p \in U \cap X_0 \quad \frac{d}{dt}(\pi \circ \varphi_t(p)) = \pi_*\left(\frac{d}{dt}\varphi_t(p)\right)$

$$= \pi_*(V(\varphi_t(p))) = \frac{d}{dt}$$

donc $\pi \circ \varphi_t(p) = t + k_p$, k_p étant une constante dépendant de p. Pour $t=0$, comme $p \in U \cap X_0$, on a $\pi \circ \varphi_0(p) = 0$ donc $k_p = 0$. Finalement, on obtient bien $\pi \circ \varphi_t(p) = t$

Posons $L = \mathrm{Im}\,\varphi$ dans le diag. 1 pour obtenir le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}]-\varepsilon,\varepsilon[\times K & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & L \\ & \searrow^{pr_1} & \downarrow \pi \\ & &]-\varepsilon,\varepsilon[\end{array}$$

(diag. 2)

où φ est un difféomorphisme d'inverse $\varphi^{-1}(p) = (t, \varphi(-t,p))$, où $t = \pi(p)$. (cf condition (3) : $\varphi_t^{(\alpha)}(U_\alpha) \subset \mathrm{Def}\, \varphi_{-t}^{(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \Lambda$ $\forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$). Notons bien que $\varphi(-t,p) \in X_0$ car pour $t' \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ et $p \in U$, on a $\pi \circ \varphi(t',p) = t' + \pi(p)$)

Le diagramme 2 fournit une trivialisation du fibré
$\pi : L \longrightarrow]-\varepsilon,\varepsilon[= U$

2°/ Cas où $T = \mathbb{R}^n$: On procède par récurrence sur n. En fait, il suffit de comprendre le passage du cas $n=1$ au cas $n=2$ pour conclure (cf. diag. 5)

Soient $\begin{cases} T = T_1 \times T_2 \quad \text{où } \dim T_1 = \dim T_2 = 1 \\ K \text{ relativement compact dans } X_{(0,0)} \\ \pi : X \longrightarrow T_1 \times T_2 \text{ une submersion de classe } C^\infty \end{cases}$

$X|_{T_2}$ est une variété différentiable comme noyau de la submersion $pr_1 \circ \pi : X \xrightarrow{\pi} T_1 \times T_2 \xrightarrow{pr_1} T_1$, et K est relativement compact dans $(X|_{T_2})_0$

Le 1% nous donne la construction d'un champ de vecteurs sur $X|_{T_2}$ qui se projette sur le champ uniforme $\frac{\partial}{\partial t_2}$ de T_2 , ce qui permet de définir la trivialisation :

$$T_2 \times X_0 \xrightarrow[\sim]{\varphi} X|_{T_2}, \quad \pi \circ \varphi = pr_1 : T_2 \times X_0 \to T_2 \qquad \text{(diag. 3)}$$

Ici, on fait l'abus d'écriture consistant à confondre, pour simplifier, X_0 et K_i , T_2 et $]-\varepsilon_2, \varepsilon_2[\subset T_2$ où $\varepsilon_2 > 0$, $X|_{T_2}$ et L^2 où L^2 désignerait un relativement compact de $X|_{T_2}$.

Construisons maintenant un difféomorphisme Ψ rendant le diag. 4 commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (t_1, y) & \longmapsto & \Psi(t_1,y) \\ T_1 \times X|_{T_2} & \xrightarrow[\sim]{\Psi} & X \\ & {\scriptstyle id \times \pi} \searrow & \downarrow \pi \\ & & T_1 \times T_2 \end{array} \qquad \text{(diag. 4)}$$

où $\pi(y) = (0, t_2) = t_2 \in T_2$

On confond à nouveau ici T_1 et $]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[\subset T_1$ où $\varepsilon_1 > 0$, X et L , L étant un relativement compact de X .

Comme π est une submersion, on peut construire comme au 1% un champ de vecteurs V sur X qui se projette sur le champ uniforme $\frac{\partial}{\partial t_1}$, ie tel que

$$\pi_* V = \frac{\partial}{\partial t_1}$$

L'intégration de ce champ donne l'application $\Psi(t_1, y)$ définie globalement pour $t_1 \in]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$ et $y \in X|_{T_2}$ (car on a supposé $X|_{T_2}$ relativement compact)

La commutativité du diag. 4 provient alors du calcul :

$$\frac{d}{dt}(\pi\circ\Psi_y) = (\pi\circ\Psi_y)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = \pi_*(V(\Psi_y(t))) = \frac{\partial}{\partial t_1}$$

donc $\frac{d}{dt}(\pi\circ\Psi_y) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \pi\circ\Psi_y(t) = (t + \text{cte}, \text{cte}')$

Si $t=0$, $\pi\circ\Psi_y(0) = \pi(y) = (0, t_2)$, donc :

$$\pi\circ\Psi_y(t) = (t, t_2)$$

Finalement les 2 diagrammes précédents donnent le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
(t_1, t_2, x) & & (t_1, y) & \longmapsto & \Psi(t_1, y) \\
T_1\times T_2\times X_0 & \xrightarrow[\sim]{id\times\varphi} & T_1\times X|_{T_2} & \xrightarrow[\sim]{\Psi} & X \\
 & \searrow^{pr_1} & & \searrow^{id\times\pi} & \downarrow \pi \\
 & & & & T_1\times T_2 \\
 & & & & (t_1, t_2)
\end{array}$$

(diag. 5)

$\pi\circ\Psi\circ(id\times\varphi)(t_1, t_2, x) = \pi\circ\Psi(t_1, \varphi(t_2, x)) = (t_1, t_2)$.

On procède de la même façon avec n dimensions : $T = T_1\times\ldots\times T_n$.

CQFD

0.1.4 <u>Remarque</u> :

Si $\pi : X \longrightarrow T$ est une submersion analytique entre 2 variétés analytiques complexes et si $\dim_{\mathbb{C}} T = k$, la dimension réelle de T est $r = 2k$ et le faisceau d'homologie de degré p de X sur T est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \subset T \rightsquigarrow H_{p+2k}(X, X_{T\setminus U})$$

dont la fibre au dessus de $t\in T$ reste $H_p(X_t)$.

0.1.5 <u>Définition</u> :

Soit $\pi : X \longrightarrow T$ une submersion. On dit qu'une classe d'homologie $h(t)$ de degré p de la fibre X_t dépend continument de t si l'application $t\mapsto h(t)$ est une section du faisceau d'homologie $H_p(X/T)$ de degré p de X sur T.

0.1.6 Définition équivalente :
Soit $\pi : X \to T$ une submersion. On dira qu'un cycle $\Gamma(t)$ de X_t se déforme continûment avec t lorsque t varie dans T si pour tout $t \in T$ il existe un voisinage ouvert U de t tel que, pour tout $t' \in U$ l'on ait : $\Gamma(t') = \sum_{i \in I} a_i s_i(t')$

où $a_i \in \mathbb{Z}$, I désigne un ensemble fini d'indices et $s_i(t')$ représente un simplexe singulier de $X_{t'}$ tel que l'application

$$s_i : U \times \Delta^p \longrightarrow X$$
$$(t, x) \longmapsto s_i(t)(x)$$

soit continue pour tout $i \in I$.

Avec cette définition, une classe d'homologie $h(t)$ de la fibre X_t dépendra continûment de t si l'on peut toujours la représenter par un cycle $\Gamma(t)$ qui se déforme continûment avec t (au voisinage de tout point de T).

On retrouve la définition de ([MAL] §4) :
"Si $\pi : X \to T$ est une fibration localement triviale, $h(t)$ dépend continûment de t si pour t' voisin de t, $h(t')$ est l'image de $h(t)$ par l'isomorphisme canonique $H_p(X_t) \simeq H_p(X_{t'})$."

En effet, si U est un voisinage ouvert connexe de t tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & (\psi(x), \pi(x)) \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & X_t \times U \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_2 & \\ U & & \end{array}$$

soit commutatif, φ étant un homéomorphisme, notons :
$\psi_{t'} = \psi|_{X_{t'}} : X_{t'} \to X_t$ l'isomorphisme induit par φ entre les fibres.
Alors $h(t)$ dépendra continûment de t, pour $t \in U$, ssi :

$$h(t') = (\psi_{t'}^{-1})_*(h(t))$$

puisque si l'on note $h(t) = [\Gamma(t)] = \left[\sum_{i \in I} a_i s_i(t)\right]$, on a :

a) $t' \mapsto (\Psi_{t'}^{-1})_*(h(t)) \doteq [\sum_{i \in I} a_i \, \Psi_{t'}^{-1} \circ s_i(t)]$ définit une section du faisceau $H_p(X/T)$ sur U, car l'application

$$\begin{array}{ccc} U \times \Delta^p & \longrightarrow & X \\ (t', x) & \longmapsto & \Psi_{t'}^{-1} \circ s_i(t)(x) = \Psi^{-1}(s_i(t)(x), t') \end{array}$$

est continue.

b) $t' \mapsto h(t')$ est une section de $H_p(X/T)$ sur U.

c) Ces 2 sections coïncident en t. Quitte à réduire U, on a bien l'égalité $h(t') = (\Psi_{t'}^{-1})_*(h(t))$.

0.1.7 Cas d'une variété à bord : Faisceau $H_p(\overline{X}/T)$.

Soient $\overline{X}$ une variété réelle à bord de classe C^∞, d'intérieur X et de bord ∂X, T une variété différentielle réelle de dimension r et $\pi : \overline{X} \to T$ une application C^∞ telle que $\pi|_X : X \to T$ et $\pi|_{\partial X} : \partial X \to T$ soient des submersions.

On peut alors définir le faisceau $H_p(\overline{X}/T)$ comme en 0.1.1 et démontrer la proposition 0.1.2 en introduisant, cette fois-ci, deux suites $\{L_i\}$ et $\{\tilde{L}_i\}$ de voisinages ouverts de K_i et $\tilde{K}_i$ dans X et ∂X respectivement, où les K_i (resp. $\tilde{K}_i$) sont des ouverts relativement compacts de X_t (resp. ∂X_t) tels que $X_t = \bigcup K_i$ (resp. $\partial X_t = \bigcup \tilde{K}_i$)

0.1.8 Faisceau d'homologie relative $H_p(\overline{X}, \partial X / T)$

Plaçons nous dans les hypothèses du § 0.1.7.

Le faisceau $H_p(\overline{X}, \partial X / T)$ est le faisceau associé au préfaisceau :

$$U \Subset T \rightsquigarrow H_{p+r}(\overline{X}, \overline{X}_{T \setminus U} \cup \partial X)$$

On vérifie alors que :

Proposition :

$$\varinjlim H_{p+r}(\overline{X}, \overline{X}_{T\setminus U} \cup \partial X) \simeq H_{p+r}(\overline{X}, \overline{X}_{T\setminus\{t\}} \cup \partial X)$$
$$\simeq H_p(\overline{X}_t, \partial X_t)$$

preuve :

Comme en 0.1.2, on obtient :

$$\varinjlim_{t\in U} H_{p+n}(\overline{X}, \overline{X}_{T\setminus U} \cup \partial X) = H_{p+n}(\overline{X}, \overline{X}_{T\setminus\{t\}} \cup \partial X)$$

et il reste à voir que $H_{p+n}(\overline{X}, \overline{X}_{T\setminus\{t\}} \cup \partial X) \simeq H_p(\overline{X}_t, \partial X_t)$.

Par hypothèse, $\pi|_X$ et $\pi|_{\partial X}$ sont des submersions. Il existe donc 2 suites croissantes $\{K_i\}$ et $\{\tilde{K}_i\}$ formées d'ouverts relativements compacts de X et ∂X respectivement, et telles que $X = \bigcup K_i$ et $\partial X = \bigcup \tilde{K}_i$.

Le lemme de 0.1.2 donne immédiatement :

$$H_p(\overline{X}_t, \partial X_t) = \varinjlim H_p(K_i \cup \tilde{K}_i, \tilde{K}_i)$$

Le lemme 0.1.3 montre l'existence d'une suite décroissante d'ouverts $\{U_i\}$ contenant t, d'une suite $\{L_i\}$ de voisinages ouverts de K_i dans X et d'une suite $\{\tilde{L}_i\}$ de voisinages ouverts de $\tilde{K}_i$ dans ∂X telles que :

(a) $\pi|_{L_i} : L_i \longrightarrow U_i$ (resp. $\pi|_{\tilde{L}_i} : \tilde{L}_i \longrightarrow U_i$) soit un fibré trivial de fibre K_i (resp. $\tilde{K}_i$)

(b) $\bigcap U_i = \{t\}$

(c) $i<j \Rightarrow U_j \subset U_i$ $L_i|_{U_j} \subset L_j$ et $\tilde{L}_i|_{U_j} \subset \tilde{L}_j$.

A partir de là, le raisonnement de la prop. 0.1.2 convient à quelques détails près. Plus précisemment :

Soit U_i' une boule légèrement plus petite que U_i. On a :

$$H_{p+n}(\overline{X}, \overline{X}_{T\setminus\{t\}} \cup \partial X) = \varinjlim H_{p+n}(L_i \cup \tilde{L}_i \cup \overline{X}_{T\setminus U_i'}, \overline{X}_{T\setminus U_i'} \cup \tilde{L}_i)$$

d'après le lemme de 0.1.2.

Par excision de $\overline{X}_{T\setminus U_i} \cup (\overline{X}_{U_i\setminus U_i'} \setminus (L_i \cup \tilde{L}_i))$ on obtient :

$$H_{p+n}(\overline{X}, \overline{X}_{T\setminus\{t\}} \cup \partial X) = \varinjlim H_{p+n}(L_i \cup \tilde{L}_i, [(L_i \cup \tilde{L}_i) \cap \pi^{-1}(U_i \setminus U_i')] \cup \tilde{L}_i)$$

$$= \varinjlim H_{p+n}((K_i \cup \tilde{K}_i) \times U_i, (K_i \cup \tilde{K}_i) \times (U_i \setminus U_i') \cup (\tilde{K}_i \times U_i))$$

puisque $L_i \cup \tilde{L}_i = (K_i \cup \tilde{K}_i) \times U_i$.

Ensuite $(U_i, U_i \setminus U_i')$ est de même type homotopique que (B^n, S^{n-1}) d'où :

$$= \varinjlim H_{p+n}((K_i \cup \tilde{K}_i) \times B^n, (K_i \cup \tilde{K}_i) \times S^n \cup \tilde{K}_i \times B^n)$$

La formule de Künneth "relative" donne alors :

$$H_{p+n}(\bar{X}, \bar{X}_{T\setminus\{t\}} \cup \partial X) =$$

$$\varinjlim \Big(\sum_{i+j=p+n} H_i(K_i \cup \tilde{K}_i, \tilde{K}_i) \otimes H_j(B^n, S^{n-1}) \oplus \sum_{i+j=p+n-1} \mathrm{Tor}(H_i(K_i \cup \tilde{K}_i, \tilde{K}_i), H_j(B^n, S^{n-1})) \Big)$$

$$= \varinjlim H_p(K_i \cup \tilde{K}_i, \tilde{K}_i)$$

ce qui permet de conclure.

0.1.9 <u>Explication de l'isomorphisme $H_p(X_t) = H_{p+2}(X, X \setminus X_t)$ lorsque $\dim_{\mathbb{C}} T = 1$.</u>

Dans les hypothèses de la prop. 0.1.2 mais lorsque T est une variété analytique complexe de dimension 1, on peut expliciter l'isomorphisme $H_p(X_t) \simeq H_{p+2}(X, X \setminus X_t)$.
Reprenons la construction de la 2-partie de la preuve de la prop. 0.1.2. On a :

$$\begin{cases} H_p(X_t) = \varinjlim H_p(K_i) \\ H_{p+2}(X, X \setminus X_t) = \varinjlim H_{p+2}(K_i \times B^2, K_i \times S^1) \end{cases}$$

et l'on peut expliciter les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} H_p(K_i) & \longrightarrow & H_p(K_i) \otimes H_2(B^2, S^1) & \xrightarrow{\kappa} & H_{p+2}(C_*(K_i) \otimes C_*(B^2, S^1)) \\ [\zeta] & \longmapsto & [\zeta] \otimes [\sigma] & \longmapsto & [\zeta \otimes \sigma] \end{array}$$

où κ désigne l'isomorphisme de Künneth et où σ est un générateur de $H_2(B^2, S^1) \simeq \mathbb{Z}$, par exemple le disque fermé $\sigma = \bar{U}_i$ de centre t.

Le morphisme de chaînes $C_*(K_i) \otimes C_*(B^2, S^1) \longrightarrow C_*(K_i \times B^2, K_i \times S^1)$ induit un isomorphisme des groupes d'homologie :

$$H_{p+2}(C_*(K_i) \otimes C_*(B^2, S^1)) \simeq H_{p+2}(K_i \times B^2, K_i \times S^1)$$

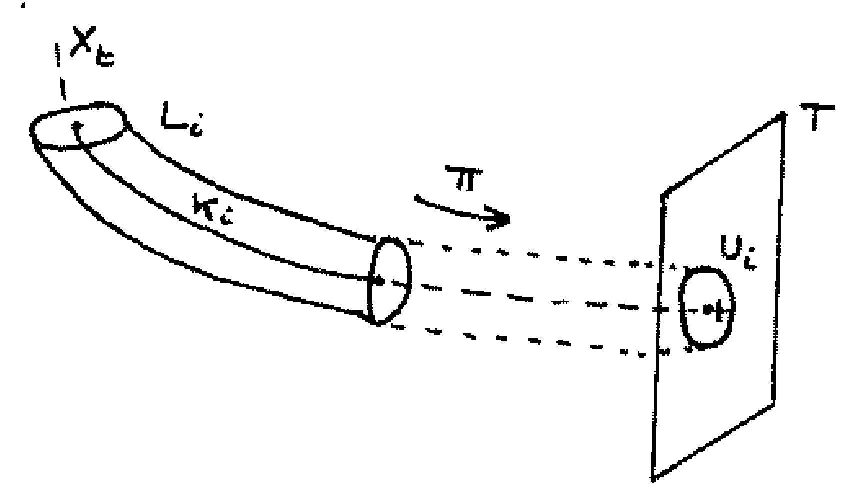
de sorte que l'on ait :

$$\begin{array}{ccc} H_p(K_i) & \xrightarrow{\sim} & H_{p+2}(K_i \times B^2, K_i \times S^1) \\ [\zeta] & \longmapsto & [\zeta \otimes \sigma] \end{array}$$

ce qui explicite l'isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} H_p(X_t) & \longrightarrow & H_{p+2}(X, X\setminus X_t) \\ [\gamma] & \longmapsto & [\gamma \otimes \sigma] \end{array}$$

par passage à la limite inductive, où $\sigma = U_i$ désigne un disque de T de centre t lorsque le support du cycle $[\gamma]$ est inclus dans K_i, les notations étant celles de la prop. 0.1.2.



0.1.10 <u>Cobord de Leray</u>.

On préfère se référer entièrement au chapitre III p 52 du livre de F. Pham ([PHA]) qui énonce clairement tous les résultats que nous utiliserons dans la suite.

On pourra aussi voir l'article de J. Leray ([LER]).

Bornons nous seulement à remarquer que si $\pi : X \longrightarrow T$ est une submersion analytique et si $\dim_{\mathbb{C}} T = 1$, le cobord de Leray $\delta_t : H_p(X_t) \longrightarrow H_{p+1}(X \setminus X_t)$ est défini comme la composée :

$$\begin{array}{ccccccc} \delta_t : & H_p(X_t) & \xrightarrow{\sim} & H_{p+2}(X, X\setminus X_t) & \xrightarrow{\partial_t} & H_{p+1}(X\setminus X_t) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [\gamma \otimes \sigma] & \longmapsto & [\gamma \otimes \partial\sigma] \end{array}$$

où ∂_t désigne le morphisme bord de l'homologie, la première flèche ayant été explicitée en 0.1.9.

0.2 Structure riemannienne sur une variété

0.2.1 Une structure riemannienne sur la variété lisse X est la donnée d'une section $\theta : X \longrightarrow \mathcal{I}(X) = \bigcup_{z\in X} \mathcal{I}_z(X)$ où $\mathcal{I}_z(X)$ désigne l'ensemble des produits scalaires sur l'espace tangent T_zX, qui vérifie : pour tout champ de vecteurs u et v lisses, l'application $X \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \theta(x)(u(x), v(x))$ est de classe C^∞. On montre, à l'aide d'une partition différentiable de l'unité, que toute variété lisse X possède une structure riemannienne.

Soit X une variété riemannienne. L'espace tangent T_zX à X en z est un espace vectoriel normé par $\theta(z)$. Si ω appartient à l'ensemble $\Omega^p(X)$ des p-formes différentielles sur X, $\omega(z) : T_zX \times \ldots \times T_zX \longrightarrow \mathbb{R}$ est une p-forme multilinéaire alternée, ie un élément de l'espace $\Lambda^p T_z^* X$, et l'on peut considérer la norme opérateur dans $\Lambda^p T_z^* X$:

$$\|\omega\|_z = \|\omega(z)\|_z \doteq \sup_{u_i \in T_zX\setminus\{0\}} \frac{|\omega(z)(u_1,\ldots,u_p)|}{\|u_1\|\ldots\|u_p\|}$$

0.2.2 <u>Lemme</u> : Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application C^∞ entre 2 variétés riemanniennes, notons $T_zf : T_zX \longrightarrow T_{f(z)}Y$ l'application tangente en z et posons :

$$\|T_zf\| = \sup_{u\in T_zX\setminus\{0\}} \frac{\|T_zf(u)\|}{\|u\|}$$

On a :

$$\forall \omega \in \Omega^p(Y) \qquad \|f^*\omega\|_z \leq \|T_zf\|^p \|\omega\|_{f(z)}$$

preuve : C'est immédiat puisque si $z \in X$ et $u_1,\ldots,u_p \in T_zX$, on a :

$$f^*\omega(z)(u_1,\ldots,u_p) = \omega(f(z))(T_zf(u_1),\ldots,T_zf(u_p))$$

donc :

$$|f^*\omega(z)(u_1,\ldots,u_p)| \leq \|\omega(f(z))\|_{f(z)} \|T_zf(u_1)\|\ldots\|T_zf(u_p)\|$$

$$\leq \|\omega(f(z))\|_{f(z)} \|T_zf\|^p \|u_1\|\ldots\|u_p\|$$

CQFD

0.2.3 Soient X une variété C^∞ de dimension n (séparée et séparable), $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de domaines de cartes (U_i, φ_i) de X et $\{\Psi_i\}_{i\in I}$ une partition C^∞ de l'unité associée à ce recouvrement.
Notons $\varphi_i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$. Une fois ces données fixées, on peut considérer la <u>structure riemannienne évidente</u> sur X : elle est obtenue par recollement des différents produits scalaires $< \ , \ >_z^i$ définis sur chacune des cartes (U_i, φ_i) par :

$$\forall z \in U_i \qquad < \sum_k a_k \frac{\partial}{\partial x_k^i}, \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j^i} >_z^i = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Ainsi :

$$< u, v >_z = \sum_{i\in I} \Psi_i(z) < u, v >_z^i$$

pour tout $u, v \in T_z X$.
L'espace tangent $T_z X$ est alors normé par $\|u\| = \sqrt{< u, u>_z}$.

L'espace $\Lambda^p T_z^* X$ des p-formes multilinéaires alternées sur $T_z X$ peut être normé des deux façons suivantes :
Si $\beta \in \Lambda^p T_z^* X$, on peut définir :

* la norme opérateur $\displaystyle \|\beta\|_z = \sup_{u_i \in T_z X \setminus \{0\}} \frac{|\beta(u_1, \ldots, u_p)|}{\|u_1\| \ldots \|u_p\|}$

* la norme : $\displaystyle |||\beta|||_z = \sup_{\substack{i\in I \\ 1\le i_1 < \ldots < i_p \le n}} |\Psi_i(z)| \, |\beta^i_{i_1 \ldots i_p}|$

où β s'écrit : $\displaystyle \beta = \sum_{1\le i_1 < \ldots < i_p \le n} \beta^i_{i_1 \ldots i_p} \, dx^i_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^i_{i_p}$ dans la carte (U_i, φ_i).
Avec ces notations, montrons le :

0.2.4 <u>Lemme</u> :

Soit K un compact de X. Il existe une constante m strictement positive, dépendant seulement du recouvrement $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ et de K, telle que :

$$\forall z \in K \quad \forall \omega \in \Omega^p(X) \quad |||\omega|||_z \le m \, \|\omega\|_z$$

preuve :

$$\frac{\omega(z)\left(\frac{\partial}{\partial x^i_{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^i_{i_p}}\right)}{\left\|\frac{\partial}{\partial x^i_{i_1}}\right\|\cdots\left\|\frac{\partial}{\partial x^i_{i_p}}\right\|} = \frac{|\omega^i_{i_1\dots i_p}(z)|}{\left\|\frac{\partial}{\partial x^i_{i_1}}\right\|\cdots\left\|\frac{\partial}{\partial x^i_{i_p}}\right\|} \leq \|\omega\|_z$$

où l'on note $\omega(z) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} \omega^i_{i_1\dots i_p}(z)\, dx^i_{i_1}\wedge\dots\wedge dx^i_{i_p}$ dans la carte (U_i, φ_i).

Il suffit de majorer chacune des normes $\left\|\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right\|$ par une constante indépendante de i et de z pour conclure. C'est possible car l'on peut toujours supposer que U_i est relativement compacte et que φ_i est en fait définie sur un voisinage de $\bar{U}_i$.
L'application $z \longmapsto \left\|\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right\|$ est continue (car $z \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i_j}\right|_z$ est un champ de vecteurs C^∞ et $\|\ \|$ provient de la structure rieman-nienne) sur le compact $K\cap\bar{U}_i$, donc majorée par une constante $m>0$ sur ce compact. Il est clair que l'on peut garder la même constante lorsque i varie dans l'ensemble fini $J = \{i\in I \,/\, U_i\cap\sigma_0 \neq \emptyset\}$ et lorsque $1\leq j\leq n$.
Finalement, on obtient bien

$$\forall z\in K \quad \forall\omega\in\Omega^p(X) \qquad \sup_{\substack{i\in I\\ 1\leq i_1<\dots<i_p\leq n}} |\omega^i_{i_1\dots i_p}(z)| \leq m^p\,\|\omega\|_z$$

d'où le lemme.

CQFD

0.2.5 <u>lemme</u> :

Soient $\omega\in\Omega^p(X)$ et $\sigma : \Delta^p \longrightarrow X$ un p-simplexe de De Rham de X. Il existe une constante, notée $\text{mes}(\sigma)$, qui dépend seulement de σ et de la structure riemannienne précédente choisie sur X, et telle que :

$$\left|\int_\sigma \omega\right| \leq \text{mes}(\sigma) . \sup_{z\in \text{Supp}\,\sigma} \|\omega\|_z$$

preuve :

σ est compact donc $J = \{ i \in I \,/\, U_i \cap \sigma \neq \emptyset \}$ est fini

On a :

$$\int_\sigma \omega \doteq \int_{\Delta^p} \sigma^* \omega \qquad \text{où} \quad \sigma^*\omega = \sum_{i \in J} \sigma^*(\Psi_i\, \omega)$$

Comme le support de $\Psi_i\,\omega$ est inclus dans U_i, notons :

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega^i_{i_1 \dots i_p}\, dx^i_{i_1} \wedge \dots \wedge dx^i_{i_p}$$

de sorte que :

$$\sigma^*(\Psi_i\,\omega) = \Psi_i \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega^i_{i_1 \dots i_p} \circ \sigma \;\; d(x^i_{i_1} \circ \sigma) \wedge \dots \wedge d(x^i_{i_p} \circ \sigma)$$

donc :

$$\int_{\Delta^p} \sigma^*(\Psi_i\,\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \int_{\Delta^p} \Psi_i\, \omega^i_{i_1 \dots i_p} \circ \sigma \;\; d(x^i_{i_1} \circ \sigma) \wedge \dots \wedge d(x^i_{i_p} \circ \sigma)$$

$$\left| \int_{\Delta^p} \sigma^*(\Psi_i\,\omega) \right| \leq C^p_n \,(\text{mes}\, \Delta^p) \sup_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ z \in \text{Supp}\,\sigma}} | \Psi_i(z)\, \omega^i_{i_1 \dots i_p}(z) |$$

$$\left| \int_\sigma \omega \right| \leq \sum_{i \in J} C^p_n \,(\text{mes}\, \Delta^p) \sup_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ z \in \text{Supp}\,\sigma}} | \Psi_i(z)\, \omega^i_{i_1 \dots i_p}(z) |$$

$$\leq \# J .\, C^p_n \,.\, \text{mes}\, \Delta^p .\, \sup_{z \in \text{Supp}\,\sigma} |||\omega|||_z$$

Le lemme 0.2.5 résulte alors du lemme 0.2.4.

CQFD

Dans le lemme suivant que nous utiliserons encore au chapitre 3, X désignera une variété riemannienne connexe :

0.2.6 *Lemme* :

Si $f : X \longrightarrow X$ est lipschitzienne (resp. localement lipschitzienne) de constante M pour la métrique riemannienne d sur X, pour tout compact K de X il existe une constante $M' > 0$ telle que :

$$\forall x \in K \qquad \| T_x f \| \leqslant M'.M$$

où M' dépend seulement du choix de K et de la structure rie-mannienne sur X.

preuve :

1) Cas où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

On a par hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \qquad \dfrac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leqslant M$

Il suffit de passer à la limite dans cette inégalité. Plus précisem-ment, on a :

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0) \quad \text{où} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

donc :

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} \right\| = \left\| \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} + \varepsilon(x) \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right\| \qquad (*)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe h_n, $\|h_n\| = \frac{1}{n}$, tel que :

$$\|f'(x_0)\| = \sup_{\|h\| = \frac{1}{n}} \frac{\|f'(x_0) h\|}{\|h\|} = \frac{\|f'(x_0) h_n\|}{\|h_n\|}$$

de sorte qu'en réécrivant $(*)$ avec $x = x_0 + h_n$ et en passant à la limite pour $n \to +\infty$, on obtienne :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\|f(x_0 + h_n) - f(x_0)\|}{\|h_n\|} = \|f'(x_0)\| \leqslant M$$

2) Cas général : Plaçons nous en $x_0 \in X$. Soient (U, φ) et (V, ψ) des cartes de X en x_0 et $f(x_0)$ respectivement.

On peut toujours supposer que ces cartes sont des voisinages normaux de chacun de leur point (cf [HEL] Th I 6.2) de sorte qu'il existe des constantes m_1, M_1, m_2, M_2 positives strictement telles que :

$\forall x, y \in U \qquad m_1 \, \| \varphi(x) - \varphi(y) \| \leq d(x,y) \leq M_1 \, \| \varphi(x) - \varphi(y) \|$

et

$\forall x, y \in V \qquad m_2 \, \| \Psi(x) - \Psi(y) \| \leq d(x,y) \leq M_2 \, \| \Psi(x) - \Psi(y) \|$

On a, pour tout $x, y \in U$:

$$\begin{aligned} \| \Psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) - \Psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(y)) \| &= \| \Psi \circ f(x) - \Psi \circ f(y) \| \\ &\leq \frac{1}{m_2} \, d(f(x), f(y)) \\ &\leq \frac{M}{m_2} \, d(x,y) \\ &\leq \frac{M.M_1}{m_2} \, \| \varphi(x) - \varphi(y) \| \end{aligned}$$

L'application $\Psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est donc lipschitzienne de constante $\frac{MM_1}{m_2}$.

D'après le cas 1), on a :

$$\forall x \in U \qquad \| (\Psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \| \leq \frac{MM_1}{m_2}$$

Mais $T_{x_0} f = \eta^{-1}_{f(x_0)} \circ (\Psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \circ \theta_{x_0}$ où $\theta_0 : T_{x_0} X \to \mathbb{R}^n$ et $\eta_{f(x_0)} : T_{f(x_0)} X \to \mathbb{R}^n$ sont les isomorphismes canoniques associés aux cartes (U, φ) et (V, Ψ) respectivement.

Donc :

$$\forall x_0 \in U \qquad \| T_{x_0} f \| \leq \| \eta^{-1}_{f(x_0)} \| \cdot \frac{MM_1}{m_2} \cdot \| \theta_{x_0} \|$$

Et il nous reste seulement à vérifier que l'on peut toujours majorer les normes $\| \theta_{x_0} \|$ et $\| \eta^{-1}_{f(x_0)} \|$ uniformément pour $x_0 \in U$:

On peut supposer que φ est définie sur un voisinage de $\bar{U}$ et que $\bar{U}$ est compact, quitte à restreindre U.

Si $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right|_{x_0}$, $\quad \theta_{x_0}(v) = (a_1, \dots, a_n)$

$$\text{et} \quad \| v \| = \sqrt{\sum_{i,j} a_i a_j \, g_{ij}(x_0)}$$

avec les notations classiques.

Ainsi :

$$\| \theta_{x_0} \| = \operatorname{Sup} \frac{\| \theta_{x_0} v \|_{\mathbb{R}^n}}{\| v \|} = \operatorname*{Sup}_{\substack{(a_1, \dots, a_n) \\ \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}} \frac{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} a_i a_j \, g_{ij}(x_0)}}$$

Notons $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$p_1(a) = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

$$p_2(a,x) = \sqrt{\sum_{i,j} a_i a_j g_{ij}(x)}$$

Si $a \in S^{n-1}$, $p_1(a) \neq 0$ et $p_2(a,x) \neq 0$, et p_1, p_2 sont des applications continues de $\mathbb{R}^n \times U$ dans $\mathbb{R}$, de sorte que l'application $\frac{p_1}{p_2} : S^{n-1} \times \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continue sur un compact.

Il existe donc $A, B > 0$ telles que :

$$\forall (a,x) \in S^{n-1} \times \bar{U} \qquad A \leq \frac{p_1(a)}{p_2(a,x)} \leq B$$

On obtient alors, par homogénéité :

$$\forall (a,x) \in \mathbb{R}^n \times U \qquad A\, p_2(a,x) \leq p_1(a) \leq B\, p_2(a,x)$$

Donc $\| \theta_{x_0} \| \leq B$ pour tout $x_0 \in U$. De la même manière, il existe une constante strictement positive $B' > 0$ telle que $\| \eta_{y_0} \| \leq B'$ pour tout $y_0 \in V$.

On aura donc bien :

$$\forall x_0 \in U \qquad \| T_{x_0} f \| \leq \frac{M M_1}{m_2} . B . B'$$

CQFD

0.3 Triangulations semi- et sous-analytiques.

Un complexe simplicial (localement fini) K de $\mathbb{R}^n$ est une famille $\{\Delta_\alpha\}_\alpha$ de simplexes ouverts disjoints (ie de sous-ensembles $\Delta_\alpha = \{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i > 0$ et $\sum \alpha_i = 1\}$ où $v_0, \dots, v_n$ désignent $n+1$ points affinement indépendants de $\mathbb{R}^n$ appelés vertexes) tels que :

(1) K est localement fini,

(2) Chaque face d'un simplexe de K est dans K.

On note $|K| = \bigcup_\alpha \Delta_\alpha$ l'espace topologique sous-jacent à K.

Soit X une variété analytique réelle. Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n \times X$ est dit partiellement semi-algébrique par rapport à la 1re variable si tout point x de X possède un voisinage ouvert U dans X tel que l'ensemble $E \cap (\mathbb{R}^n \times U)$ appartienne à la famille booléenne engendrée par les ensembles de la forme $\{f(\lambda, x) \geq 0\}$ où f est une fonction analytique sur $\mathbb{R}^n \times U$ et polynômiale en $\lambda \in \mathbb{R}^n$.
On rappelle qu'une famille booléenne de X désigne une famille de parties de X stable par intersection finie, par réunion finie et par complémentation.

Soit $\chi : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ une application continue dont le graphe dans $\mathbb{R}^n \times X$ est partiellement semi-algébrique par rapport à la première variable.
Le Théorème de Seidenberg ([LOJ] §1 V) montre alors que l'image de tout ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ par χ est un sous-ensemble semi-analytique de X.

Soit X une variété analytique réelle. Une triangulation semi-analytique de X est la donnée d'un complexe simplicial K de $\mathbb{R}^n$ et d'un homéomorphisme

$$\chi : |K| \longrightarrow X$$

tels que :

(a) le graphe de χ dans $\mathbb{R}^n \times X$ est partiellement semi-algébrique en la 1re variable,

(b) Pour tout simplexe Δ de K, $\chi(\Delta)$ est une sous-variété analytique réelle de X et

$$\chi : \Delta \xrightarrow{\sim} \chi(\Delta)$$

est un isomorphisme analytique.

Les ensembles $\chi(\Delta)$ s'appellent les <u>simplexes de la triangulation</u>. Le théorème fondamental concernant les triangulations semi-analytiques est dû à Lojasiewicz ([LOJ] §3 Th.2) :

<u>Théorème de triangulation</u>

Soit $\{X_\alpha\}$ une famille localement finie de sous-ensembles semi-analytiques d'une variété analytique réelle (séparée et séparable) X.
Il existe une triangulation semi-analytique de X compatible avec chacun des X_α, ie telle que X_α soit une réunion des simplexes $\chi(\Delta)$ de la triangulation qui l'interceptent.

Dans [HIR5], Hironaka démontre le Théorème de triangulation en remplaçant "semi-analytique" par "sous-analytique". La preuve par récurrence qui y est donnée dans le cas semi-algébrique permet une démonstration plus aisée dans le cas sous-analytique.

<u>Remarques</u> :

1) On utilisera le Théorème de triangulation pour des variétés analytiques complexes en considérant la structure analytique réelle sous-jacente.

2) Deligne énonce une définition plus faible : dans ([DEL] II §2), une triangulation semi-analytique de X est la donnée d'une famille $\mathcal{J}$ de parties de X, appelées les simplexes de la triangulation, qui recouvrent X et telles que :

(a) Tout élément de $\mathcal{J}$ est une partie semi-analytique fermée,

(b) $\mathcal{J}$ est localement finie,

(c) $\mathcal{J}$ est stable par intersection

(d) Pour tout $\sigma \in \mathcal{J}$ il existe un homéomorphisme

$$\chi : \Delta \xrightarrow{\sim} \sigma$$

où Δ désigne un simplexe euclidien standard, et :

* le graphe de χ dans $\mathbb{R}^n \times X$ est partiellement semi-algébrique par rapport à la première variable,

* χ transforme l'ensemble des faces de Δ en l'ensemble des simplexes s de $\mathcal{T}$ contenus dans σ.

3) L'image réciproque d'une triangulation semi-analytique par un revêtement est encore une triangulation semi-analytique : on sait, en effet, qu'un revêtement sur un ensemble simplement connexe, les simplexes de la triangulation, est un revêtement trivial.

0.4 <u>Théorème de désingularisation de Hironaka</u>.

Soient X un espace complexe séparable, S un sous-espace complexe fermé de X contenant tous les points singuliers de X. Il existe un morphisme propre $\pi : X' \longrightarrow X$ tel que :

(i) X' lisse et $\pi : X' \setminus \pi^{-1}(S) \longrightarrow X \setminus S$ est un isomorphisme,

(ii) $\pi^{-1}(S)$ est une hypersurface (ensemblistement) qui est réunion localement finie d'hypersurfaces lisses à croisements normaux,

(iii) Si U et V sont deux ouverts de X et si $\varphi : X|_U \to X|_V$ est un isomorphisme vérifiant $\varphi(S|_U) = S|_V$, alors il existe un isomorphisme $\varphi' : X'|_{\pi^{-1}(U)} \longrightarrow X'|_{\pi^{-1}(V)}$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X'|_{\pi^{-1}(U)} & \xrightarrow{\varphi'} & X'|_{\pi^{-1}(V)} \\ \pi|_U \downarrow & & \downarrow \pi|_V \\ X|_U & \xrightarrow{\varphi} & X|_V \end{array}$$

soit commutatif.

(référence : [HIR 4] § 7)

Chapitre 1 : Analyticité des intégrales dépendant d'un paramètre

1.1 Préliminaires

1.1.1 lemme

Soient X une variété différentielle réelle de classe C^∞, Γ une p-chaîne de X et ω_t une p-forme différentielle C^∞ sur un voisinage ouvert U de Γ et holomorphe par rapport à t pour t variant dans W, où W désigne un ouvert d'une variété analytique complexe T.
Alors la fonction $f(t) = \int_\Gamma \omega_t$ est holomorphe sur W

preuve :
$\Gamma = \sum c_i \sigma_i$ et tout revient à montrer que $\int_{\sigma_i} \omega_t$ est holomorphe sur W quand σ_i est un simplexe de De Rham.
On peut toujours supposer que les simplexes σ_i ont leur support inclus dans un domaine U_i de cartes de X où ω_t s'exprime :

$$\omega_t(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(x, t)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

où les $\omega_{i_1 \dots i_p}$ désignent des fonctions C^∞ par rapport à x sur U_i et holomorphes en t.
On a :

$$\int_{\sigma_i} \omega_t = \sum \int_{\sigma_i} \omega_{i_1 \dots i_p}(x, t)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

$$= \sum \int_{\Delta^p} \omega_{i_1 \dots i_p}(\sigma_i(y_1, \dots, y_p), t)\, d(x_{i_1} \circ \sigma_i) \wedge \dots \wedge d(x_{i_p} \circ \sigma_i)$$

où $\sigma_i : \Delta^p \to X$, Δ^p étant le p-simplexe euclidien standard.

L'intégrand de toutes ces intégrales est holomorphe en t et l'on intègre sur le compact Δ^p, de sorte que toutes ces intégrales soient des fonctions holomorphes en t.

CQFD

1.1.2 <u>lemme</u>

Soient X une variété différentielle réelle et $\Gamma(t)$ un p-cycle de X se déformant continûment avec t lorsque t décrit un ouvert W d'une variété analytique complexe T.
Soit ω_t une p-forme différentielle de classe C^∞ et fermée sur un voisinage ouvert $U(t)$ de $\Gamma(t)$ pour tout $t \in W$, holomorphe par rapport à $t \in W$.
Alors, la fonction $f(t) = \int_{\Gamma(t)} \omega_t$ est holomorphe sur W

preuve :
Fixons $t_0 \in T$. Par hypothèse, pour tout t voisin de t_0, ω_t s'exprimera :

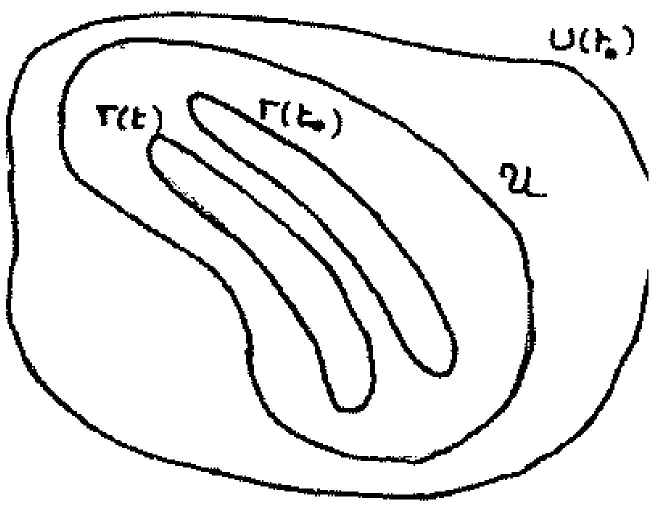
$$\omega_t(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(x,t) \; dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

. sur chaque carte (U, φ) de X contenue dans $U(t_0)$, $\omega_{i_1 \dots i_p}(x,t)$ désignant une fonction de classe C^∞ sur U et holomorphe en t sur un voisinage convenable de t_0.
Considérons un recouvrement fini $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ du compact $\Gamma(t_0)$ formé par des domaines de cartes du type ci-dessus.
$\mathcal{U} \doteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ est un voisinage ouvert de $\Gamma(t_0)$ et l'on peut facilement trouver un voisinage ouvert W' de t_0 dans T tel que :

$\forall t \in W'$ $\forall i \in [1, k]$ $\forall x \in U_i$ $\omega_{i_1 \dots i_p}(x,t)$ est C^∞ en x sur U_i et holomorphe en t pour $t \in W'$.

Ainsi pour tout $t \in W'$, ω_t est définie sur $\mathcal{U}$, donc :

$$\forall t \in W' \quad \mathcal{U} \subset U(t)$$



Comme $\Gamma(t)$ varie continûment, on peut supposer quitte à diminuer le voisinage W' que :
$\forall t \in W'$ $\Gamma(t) \subset \mathcal{U}$
On peut aussi supposer que W' est une boule ouverte de centre t_0 dans $T = \mathbb{C}^n$ et définir l'application :

$$F : [0,1] \times \Delta^p \longrightarrow \mathcal{U}$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \Gamma(t_0 + \lambda(t - t_0))(x)$$

F est une homotopie continue de $\Gamma(t_0)$ à $\Gamma(t)$ dans $\mathcal{U}$. Ainsi, pour $t \in W'$, $\Gamma(t_0)$ et $\Gamma(t)$ sont 2 cycles homologues dans $\mathcal{U}$.
Comme $\omega_t \in \Omega^p(\mathcal{U})$ est une forme fermée, l'intégrale $f(t)$ ne dépend pas de la classe d'homologie de $\Gamma(t)$ dans $\mathcal{U}$, donc :

$$\forall t \in W' \qquad f(t) = \int_{\Gamma(t)} \omega_t = \int_{\Gamma(t_0)} \omega_t$$

On est ramené à la situation du lemme 1.1.1.
CQFD

Remarque : l'hypothèse "$\Gamma(t)$ est un cycle" est essentielle. (Contre-exemple : si $[0, z(t)]$ est une chaîne variant continûment avec t, $\int_0^{z(t)} dz = z(t)$ n'est pas nécessairement holomorphe)

1.1.3 lemme

Soient X une variété analytique complexe
S_t une sous-variété analytique complexe fermée de codimension 1 dépendant analytiquement de t (ie dont les équations locales sont des fonctions analytiques de t)
φ_t une forme différentielle régulière et fermée sur $X \setminus S_t$, dépendant holomorphiquement de t.
ω_t la forme résidu $\operatorname{res}[\varphi_t]$. C'est une forme différentielle sur S_t
$\gamma(t)$ un cycle de $S(t)$ qui se déforme continûment avec t.
Alors la fonction $f(t) = \int_{\gamma(t)} \omega_t$ est holomorphe.

preuve : La formule des résidus de Leray ([PHA] III 3.2 p 59) donne :

$$f(t) = \int_{\gamma(t)} \omega_t = \frac{1}{i2\pi} \int_{\delta\gamma(t)} \varphi_t$$

où φ_t est une forme différentielle régulière et fermée sur $X \setminus S_t$ et où $\delta\gamma(t)$ est un cycle de $X \setminus S_t$ dépendant continûment de t.
Ce sont les hypothèses du lemme 1.1.2 avec $U(t) = X \setminus S_t$ CQFD

1.2 Intégration d'une forme différentielle relative sur une classe d'homologie de la fibre

Soit $\pi : X \longrightarrow T$ une application analytique entre 2 variétés analytiques complexes.
Dans tout le chapitre 1 on notera $X_S = \pi^{-1}(S)$ pour tout sous-ensemble S de T et $X_t = \pi^{-1}(t)$ la fibre de π au dessus du point t.
Notons $\Omega^p(X)$ l'espace vectoriel des p-formes différentielles holomorphes sur X et $\Omega^p(X/T)$ l'ensemble des p-formes différentielles holomorphes <u>relatives</u> de X sur T défini par :

$$\Omega^p(X/T) = \frac{\Omega^p(X)}{\pi^*(\Omega^1(T)) \wedge \Omega^{p-1}(X)}$$

Comme $d(\pi^*(\Omega^1(T)) \wedge \Omega^{p-1}(X)) \subset \pi^*(\Omega^1(T)) \wedge \Omega^p(X)$, on peut définir la dérivation extérieure $d_{X/T}$ des formes différentielles relatives par passage au quotient.
Ainsi $d_{X/T} : \Omega^p(X/T) \longrightarrow \Omega^{p+1}(X/T)$.

Une forme différentielle relative $\dot{\omega}$ est dite <u>fermée</u> si $d_{X/T}(\dot{\omega}) = 0$

Si $\pi : X \to T$ est une submersion en $x \in X$, le Théorème du rang montre l'existence d'une carte U en x et d'une carte V en $f(x)$ telles que $\pi(U) \subset V$ et où π s'exprime

$$\pi(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_r) = (t_1, \dots, t_r)$$

dans les systèmes de coordonnées locales correspondants.

Toute classe $\dot{\omega}$ de $\Omega^p(X/T)$ possède alors un représentant ω défini sur le voisinage U de x tel que :

(*) $$\forall (x,t) \in U \qquad \omega(x,t) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(x,t)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

où $\omega_{i_1 \dots i_p}$ désignent des fonctions holomorphes sur U.

En effet si $\omega \in \Omega^p(X/T)|_U$, on a :

$$\omega(x,t) = \sum_{\substack{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n \\ 1\leq j_1<\dots<j_{p-k}\leq \lambda \\ 0\leq k\leq p}} \omega_{i_1\dots j_{p-k}}(x,t)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\wedge dt_{j_1}\wedge\dots\wedge dt_{j_{p-k}}$$

sur U.

Tout élément de $\pi^*(\Omega^1(T))|_U$ s'écrit sous la forme :

$$\pi^*\Big(\sum_{i=1}^{\lambda} a_i(t)\, dt_i\Big) = \sum_{i=1}^{\lambda} a_i(t\circ\pi)\, d(t_i\circ\pi) = \sum_{i=1}^{\lambda} a_i(t)\, dt_i$$

sur U.

Ainsi, tout élément de $(\pi^*(\Omega^1(T))\wedge\Omega^{p-1}(X))|_U$ s'écrira sous la forme $\sum_{i=1}^{\lambda} dt_i\wedge\omega_i$ sur U, où $\omega_i\in\Omega^{p-1}(U)$.

Il est alors clair que :

$$\omega - \sum_{\substack{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n \\ k=p}} \omega_{i_1\dots i_p}(x,t)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p} \in (\pi^*(\Omega^1(T))\wedge\Omega^{p-1}(X))|_U$$

Supposons maintenant que $\pi : X\to T$ soit une submersion, et considérons une section continue $t\mapsto h(t)\in H_p(X_t)$ du faisceau d'homologie $H_p(X/T)$ de X sur T (cf 0.1)

Soit $\gamma(t)$ un cycle représentant la classe $h(t)$. Alors :

$$\forall\,\omega\in\pi^*(\Omega^1(T))\wedge\Omega^{p-1}(X) \qquad \int_{\gamma(t)}\omega = 0 \qquad (**)$$

de sorte que nous pouvons définir l'intégrale $\int_{\gamma(t)}\omega$ d'une p-forme relative sur $\gamma(t)$.

Montrons (**) : On peut toujours supposer que $\gamma(t)$ a son support inclus dans U où U est un domaine d'une carte de X où $\pi(x,t)=t$. Si $\omega\in\pi^*(\Omega^1(T))\wedge\Omega^{p-1}(X)$, ω s'écrit :

$$\omega(x,t) = \sum_{i=1}^{\lambda} dt_i\wedge\omega_i \qquad \begin{array}{l}\omega_i\in\Omega^{p-1}(U)\\ (x,t)\in U\end{array}$$

donc $\int_{\gamma(t)} \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\gamma(t)} dt_i \wedge \omega_i = \sum_{i=1}^{r} \int_{\gamma(t)} d(t_i \wedge \omega_i) - t_i \wedge d\omega_i$

$$= \sum_{i=1}^{r} \int_{\partial\gamma(t)} t_i \wedge \omega_i - \int_{\gamma(t)} t_i \wedge d\omega_i$$

d'après la formule de Stokes ([PHA] 1.4 p 28). Mais t_i est constant sur $\gamma(t)$ par hypothèse, donc :

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \sum_{i=1}^{r} t_i \int_{\partial\gamma(t)} \omega_i - t_i \int_{\gamma(t)} d\omega_i = 0$$

en appliquant à nouveau la formule de Stokes. Ce qui prouve (**).

On fera dorénavant l'abus consistant à confondre un représentant ω avec la classe $\bar{\omega}$ dans $\Omega^p(X/T)$.
On écrira donc $\omega \in \Omega^p(X/T)$ et pratiquement, lorsque π est une submersion, on prendra la représentation locale de ω donnée en (*) où n'interviennent plus les différentielles des dernières coordonnées $t_1, \ldots, t_r$.
Dans ce qui suit, intuitivement, $x_1, \ldots, x_n$ vont être les variables à intégrer et $t_1, \ldots, t_r$ les paramètres dans T.

Si $\omega \in \Omega^p(X/T)$ est fermée, ie si $d_{X/T}(\omega) = 0$, la formule de Stokes montre que l'intégrale de ω sur un cycle de dimension p ne dépend que de la classe d'homologie de ce cycle.
On pourra donc considérer l'intégrale d'une p-forme différentielle holomorphe relative et fermée sur une classe d'homologie $h(t) \in H_p(X_t)$ dépendant continûment de $t \in T$ dans le sens précisé à la section 0.1
Notations :

$$f(t) = \int_{h(t)} \omega \qquad \text{où} \quad \begin{cases} \omega \in \Omega^p(X/T) \\ h(t) \in H_p(X_t) \end{cases}$$

1.2.1 Proposition

Si $\pi : X \to T$ est une submersion analytique, si $\omega \in \Omega^p(X/T)$ est fermée et si $h(t)$ désigne une classe d'homologie de la fibre $X_t = \pi^{-1}(t)$ dépendant continûment de t, la fonction

$$f(t) = \int_{h(t)} \omega$$

est holomorphe sur T.

preuve :

On peut supposer que $\dim_{\mathbb{C}} T = 1$ grâce au théorème de Hartogs.
Pour $t \in T$, $\varphi = \frac{d\pi \wedge \omega}{\pi - t}$ représente une $(p+1)$-forme différentielle fermée de $X \setminus X_t$ ayant sur X_t une singularité polaire d'ordre 1. Donc $\operatorname{res}[\varphi] = \omega$.
Nous sommes exactement dans les hypothèses du lemme 1.1.3.
CQFD

Dans la pratique, il est impossible d'appliquer la Prop. 1.2.1 car l'intégrale $f(t) = \int_{h(t)} \omega$ n'est donnée qu'au voisinage d'un point de T, ie on possède seulement une section locale de $H_p(X/T)$.
Il s'agit alors de prolonger le germe $f(t)$ pour obtenir une fonction analytique multiforme sur un sous-ensemble convenable T^* de T.

1.3 Cas propre I

On rencontre souvent la situation où :

" $\pi : X \longrightarrow T$ est une application analytique propre entre 2 variétés analytiques complexes et ω est une forme différentielle relative fermée sur $X^* = X \setminus Y$ où Y désigne une hypersurface analytique de X. "

C'est le lemme suivant qui joue un rôle clef :

1.3.1 <u>Lemme</u>

Soient $\pi : X \longrightarrow T$ une application analytique propre entre 2 variétés analytiques complexes et Y une hypersurface analytique de X.
Il existe un sous-ensemble analytique $\Sigma \subset T$ tel que l'application :

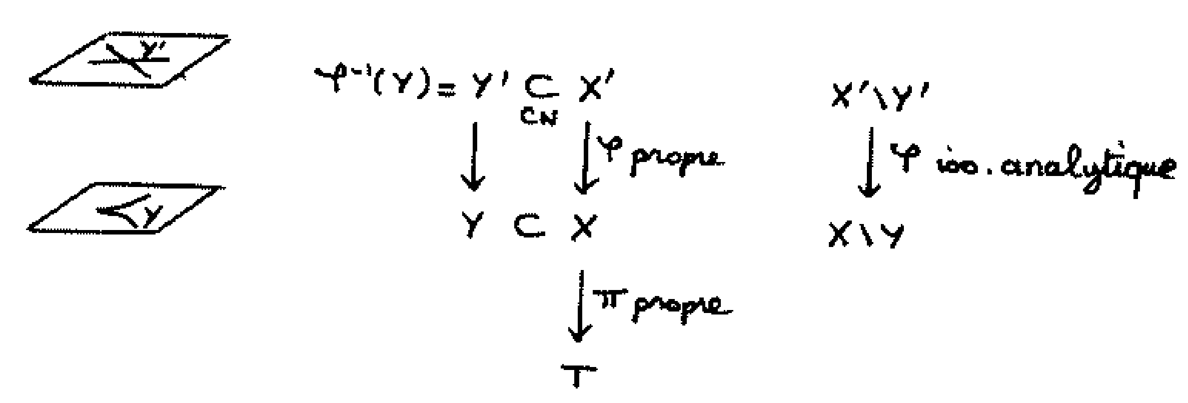
$$\pi : X \setminus Y \cap \pi^{-1}(T \setminus \Sigma) \longrightarrow T \setminus \Sigma$$

soit une fibration C^∞ localement triviale de base $T \setminus \Sigma$.

preuve :

1) <u>On se ramène au cas où Y est un diviseur à croisements normaux</u>, ie $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k \cup \ldots$ est un ensemble analytique qui s'écrit comme réunion localement finie d'hypersurfaces sans singularités à croisements normaux.

En effet, d'après le Théorème de résolution des singularités de Hironaka (cf section 0.4) il existe une variété analytique complexe X', un diviseur à croisements normaux Y' de X' et une application propre $\varphi : X' \longrightarrow X$ qui induise un isomorphisme analytique de $X' \setminus Y'$ sur $X \setminus Y$



$\pi \circ \varphi$ est propre. Supposons que l'on ait résolu le problème dans le cas où Y' est à croisements normaux. On possède donc un sous-ensemble analytique Σ de T tel que $\pi \circ \varphi$ définisse une fibration C^∞ localement triviale. Le diagramme suivant permet de conclure :

$$\begin{array}{ccc} (X' \setminus Y') \cap (\pi \circ \varphi)^{-1}(T \setminus \Sigma) & \xrightarrow{\pi \circ \varphi} & \\ \wr\!\downarrow \varphi \text{ isomorphisme analytique} & & \\ (X \setminus Y) \cap \pi^{-1}(T \setminus \Sigma) & \xrightarrow{\pi} & T \setminus \Sigma \end{array}$$

2) Choix de Σ

$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k \cup \ldots$ où les Y_i sont des hypersurfaces sans singularité en position générale. Si $I \subset \mathbb{N}$, I fini et $I \neq \emptyset$, posons $Y^I = \bigcap_{i \in I} Y_i$

Y^I est une sous-variété de codimension $\# I$.

Posons :

$$S = \bigcup S_I \quad \text{où } S_I = \{x \in Y^I / \; T_x\pi|_{Y^I} \text{ non surjective}\}$$

$$\text{et} \quad \mathcal{S} = \{x \in X / \; T_x\pi \text{ non surjective}\}$$

S_I est un sous-ensemble analytique de Y^I et Y^I est une sous-variété fermée de X donc S_I est un sous-ensemble analytique de X.

Comme la famille $\{Y_i\}$ est localement finie, S sera un sous-ensemble analytique de X. Ainsi la réunion $S \cup \mathcal{S}$ sera un sous-ensemble analytique de X comme réunion de 2 sous-ensembles analytiques.

Comme π est propre, $\pi(S \cup \mathcal{S}) \doteq \Sigma$ est encore un sous-ensemble analytique de T, distinct de T d'après le Théorème de Sard.

Remarque : On peut supposer que $\dim X \geqslant \dim T$, sinon le lemme devient trivial puisqu'on a enlevé tous les points singuliers de π dans X, donc tout X.

3) Tout revient à montrer l'assertion (A) :

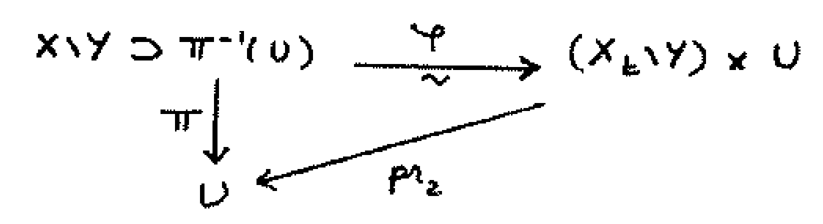
(A) : Soient X une variété analytique complexe, $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k \cup \ldots$ un diviseur à croisements normaux des hypersurfaces analytiques lisses Y_i de X et $\pi : X \longrightarrow T$ une application C^∞ et propre entre 2 variétés différentielles réelles (la structure différentielle réelle de X provenant de sa structure analytique complexe).

On suppose que :

(a) $\pi : X \setminus Y \longrightarrow T$ est une submersion

(b) $\pi|_{Y^I} : Y^I \longrightarrow T$ est une submersion pour tout $I \subset \mathbb{N}$, I fini.

Alors $\pi : X\setminus Y \longrightarrow T$ est une fibration C^∞ localement triviale, ie tout point t de T possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un difféomorphisme φ rendant le diagramme suivant commutatif :



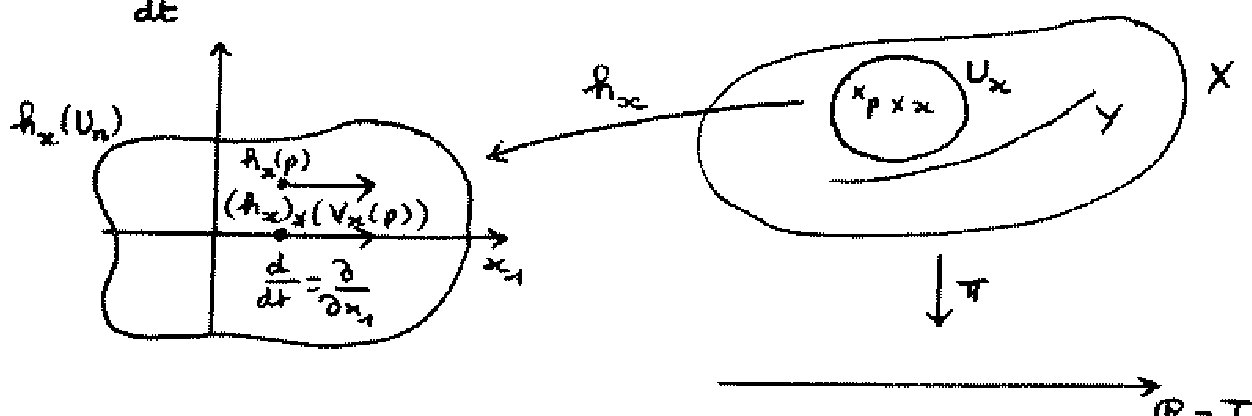
(<u>(A) ⇒ lemme 1.3.1</u> : Si $\pi : X \longrightarrow T$ est propre, soit $\tilde{\pi} : X\cap\pi^{-1}(T^*) \longrightarrow T^*$ où $T^* = T\setminus\Sigma$ et Σ est définie comme au 2). $\tilde{\pi}$ est propre (si K est un compact de T^*, $\tilde{\pi}^{-1}(K) = \pi^{-1}(K)\cap\pi^{-1}(T^*) = \pi^{-1}(K\cap T^*) = \pi^{-1}(K)$ est compact) et il suffit d'appliquer (A).)

4) <u>Preuve de (A) lorsque $\dim_{\mathbb{R}} T = 1$</u>

<u>1er stade</u> : On construit un champ de vecteurs V sur X dont la projection $\pi_* V$ sur T est le champ de vecteurs uniforme $\frac{d}{dt}$ de T, et qui vérifie :

$$\forall I\subset\mathbb{N} \quad I \text{ fini et } I\neq\emptyset \quad \forall x\in Y^I \quad V(x)\in T_x Y^I$$

① Si $x\notin Y$, il existe une carte (U_x, h_x) de X en x telle que $U_x\cap Y=\emptyset$ et un champ de vecteurs V_x sur U_x tel que $\pi_* V_x = \frac{d}{dt}$:



Soit $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.

Le théorème du rang montre l'existence d'une carte (U_x, h_x) en x telle que :

$$\tilde{\pi} = \pi \circ h_x^{-1} \ : \ h_x(U_x) \longrightarrow T = \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_{2n}) \longmapsto x_1$$

$\frac{\partial}{\partial x_1}$ est un champ de vecteurs de $h_x(U_x)$ que l'on transporte dans U_x grâce à h_x pour obtenir :

$$V_x = (h_x^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

On a :

$\tilde{\pi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{d}{dt}$ car si $f : \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ on a

$$\tilde{\pi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) f = \frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \tilde{\pi}) = f'(x_1) = \frac{d}{dt} f$$

donc $\pi_* V_x = \pi_* \circ (h_x^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \tilde{\pi}_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{d}{dt}$.

② Si $x \in Y$, notons I le plus grand ensemble d'indices tel que $x \in Y^I$ et construisons un champ de vecteurs V_x sur le domaine U_x d'une carte (U_x, h_x) en x tel que :

1) $\pi_* V_x = \frac{d}{dt}$

2) $\forall J \subset \mathbb{N}$, J fini $\quad \forall p \in U_x \cap Y^J \quad V_x(p) \in T_p Y^J$

Supposons que $I = \{1, \dots, m\}$ et choisissons U_x tel que pour tout $m < j$ on ait $U_x \cap Y_j = \emptyset$.
Le problème étant local au voisinage de $x \in Y$, on peut supposer que $U_x = \mathbb{C}^n$; $x = 0$; $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow T$ et $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ où $Y_j : z_j = 0 \quad (1 \leq j \leq m)$. Ainsi $Y : z_1 \cdots z_m = 0$.
La plus petite strate de Y contenant 0 est :

$$Y^I : \quad z_1 = \dots = z_m = 0 \qquad \text{où } m \leq n$$

(En fait $m < n$ car $\pi|_{Y^I}$ est une submersion donc $\dim_{\mathbb{C}} Y^I \geq 1$)

Notons $z_j = x_j + i y_j$ et $\frac{\partial \pi}{\partial z_j} \doteq \left(\frac{\partial \pi}{\partial x_j}, \frac{\partial \pi}{\partial y_j}\right)$.

Par hypothèse, la matrice $W = \left(\frac{\partial \pi}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial z_m}, \frac{\partial \pi}{\partial z_{m+1}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial z_n}\right)$

définit une surjection de $T_0 Y^I$ sur $\mathbb{R}$ et $z_{m+1}, \dots, z_n$ sont les coordonnées locales de Y^I, donc

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial z_{m+1}}, \dots, \frac{\partial \pi}{\partial z_n}\right) \text{ est une surjection en } 0 .$$

On peut donc supposer que $\frac{\partial \pi}{\partial y_n}(0) \neq 0$ quitte à réindicer les coordonnées, et que $\frac{\partial \pi}{\partial y_n}(p) \neq 0$ pour tout p dans $U_x = \mathbb{C}^n$ quitte à restreindre la carte U_x. Il s'agit de définir le champ

$V = \sum a_j \frac{\partial}{\partial z_j} = (a_1, \ldots, a_n)$ où l'on pose $a_j = (b_j, c_j)$

et $a_j \frac{\partial}{\partial z_j} = b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c_j \frac{\partial}{\partial y_j}$.

Il suffit que $a_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq m$ pour que V soit tangent à Y^J pour tout $J \subset I$. Prenons par exemple :

$$V = (0, \ldots, 0, a_n) \quad \text{et} \quad a_n(p) = \left(0, \frac{1}{\frac{\partial \pi}{\partial y_n}(p)}\right)$$

pour avoir en plus la condition :

$$\pi_* V = W \cdot V = 1 \Leftrightarrow \pi_* V = \frac{d}{dt}$$

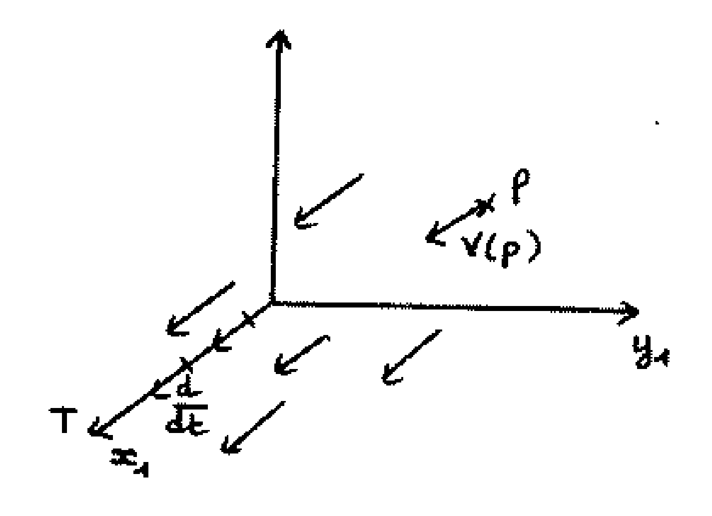


figure : $z_1 = x_1 + i y_1$

$Y^I : z_1 = 0$

$V(p)$ a même direction que $\frac{d}{dt}$ seul son module varie.

③ On considère un atlas (U_{x_j}, h_{x_j}) formé de cartes du type précédent et $\{\psi_j\}_{j \in J}$ une partition différentiable C^∞ de l'unité associée au recouvrement localement fini $\{U_{x_j}\}_j$.

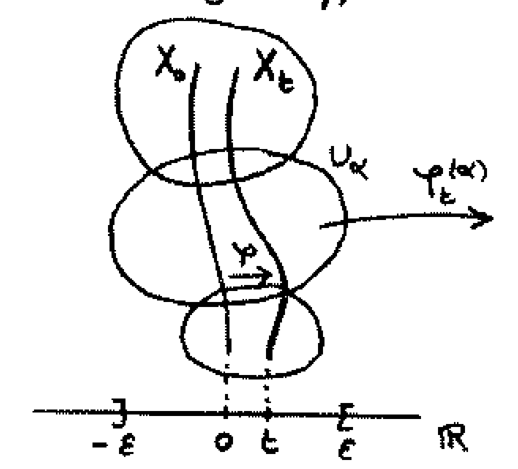
Le champ de vecteurs $V = \sum_{j \in J} \psi_j V_{x_j}$ vérifie clairement les 2 conditions requises.

2

<u>2° stade : On intègre V.</u>

Plaçons nous au voisinage du point $0 \in T$ et notons $X_0 = \pi^{-1}(0)$ la fibre de $\pi : X \longrightarrow T$ au dessus de 0.

Il existe un groupe local à 1 paramètre de transformations dont la transformation infinitésimale est le champ V, soit $\{U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \varphi_t^{(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$ avec les notations de la preuve du lemme 0.1.3, où U_α est un ouvert de X, $\varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et où $\varphi_t^{(\alpha)} : U_\alpha \longrightarrow X$ désigne un difféomorphisme sur son image, le tout vérifiant les 4 propriétés standard déjà rappelées.

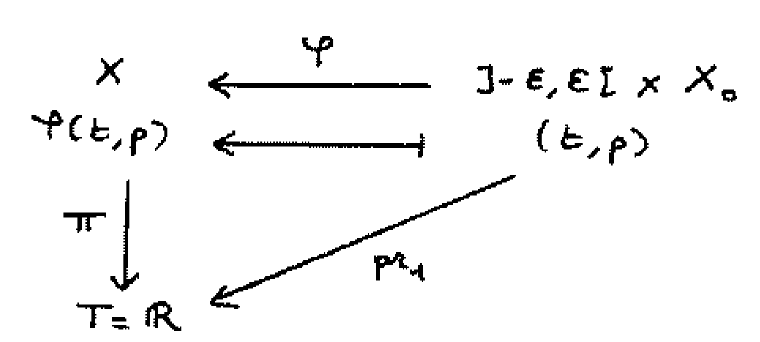


On recouvre la variété compacte X_0 par un nombre fini d'ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Si $\varepsilon = \inf \{\varepsilon_\alpha / \alpha \in \Lambda\}$ et $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, l'application

$$\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \longrightarrow X$$
$$(t, p) \longmapsto \varphi_t^{(\alpha)}(p) \text{ si } p \in U_\alpha$$

est parfaitement définie et de classe C^∞.

Le diagramme :



est commutatif.

En effet, si $(t,p) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times X_0$, notons indifféremment $\varphi(t,p) = \varphi_t(p) = \theta_p(t)$.

On a :

$$(\pi \circ \theta_p)'(t) \cdot \frac{d}{dt} = (\pi \circ \theta_p)_* \left(\frac{d}{dt}\right) = \pi_* \left(\theta_{p*}\left(\frac{d}{dt}\right)\right)$$
$$= \pi_* \left(V(\varphi(t,p))\right)$$
$$= \frac{d}{dt}$$

donc $(\pi \circ \theta_p)'(t) = 1 \Rightarrow \pi \circ \varphi(t,p) = t + k_p$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. En fait $k_p = 0$ car $\pi \circ \varphi(0,p) = \pi(p) = 0$ pour $p \in X_0$ et l'on obtient bien $\pi \circ \varphi(t,p) = t$

On a $\underline{\operatorname{Im} \varphi = \pi^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)}$. En effet, l'inclusion $\operatorname{Im}\varphi \subset \pi^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ provient de $\pi \circ \varphi = pr_1$. Inversement si $p \in \pi^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$, soit $\pi(p) = t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. L'application $\varphi(-t,\cdot) = \varphi_{-t} : X_t \xrightarrow{C^\infty} X_0$ est l'inverse de $\varphi_t : X_0 \longrightarrow X_t$ puisque $\varphi(t, \varphi(-t,p)) = \varphi(0,p) = p$. Il suffit de prendre $p_0 = \varphi(-t,p)$ pour avoir $\varphi(t,p_0) = p$ et finalement $\pi^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset \operatorname{Im}\varphi$.

On obtient le diagramme commutatif :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) & \xleftarrow[\sim]{\varphi} &]-\varepsilon,\varepsilon[\times X_0 \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ ]-\varepsilon,\varepsilon[& & \end{array}$$

où φ est un difféomorphisme d'inverse $\varphi^{-1}(p) = (t, \varphi(-t,p))$ où $t = \pi(p)$ et $\varphi(-t,\cdot) : X_t \xrightarrow{C^\infty} X_0$.

Comme le champ de vecteurs V est tangent à Y^I pour tout $I \subset \mathbb{N}$, $\varphi(]-\varepsilon,\varepsilon[\times X_0 \setminus Y) \subset X \setminus Y$ et le diagramme ci-dessus permet d'obtenir le diagramme commutatif :

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{array}{ccc} X\setminus Y \cap \pi^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) & \xleftarrow[\sim]{\varphi} &]-\varepsilon,\varepsilon[\times (X_0 \setminus Y) \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ ]-\varepsilon,\varepsilon[& & \end{array}$$

L'assertion (A) est montrée lorsque $\dim_{\mathbb{R}} T = 1$

<u>Remarque</u> : Dans les hypothèses de (A), le diagramme (I) montre que $\pi : X \longrightarrow T$ définit une fibration C^∞ localement triviale, et le diagramme (II) signifie que la paire (X,Y) est localement triviale.

5) Preuve de (A) pour T de dimension quelconque.

On fait un raisonnement par récurrence sur la dimension de T. En fait, il suffit de comprendre le passage du cas où $\dim_{\mathbb{R}} T = 1$ à celui où $\dim_{\mathbb{R}} T = 2$ pour conclure :
Soit $T = T_1 \times T_2$ où $\dim T_1 = \dim T_2 = 1$ et $\pi : X \xrightarrow{C^\infty} T$ une application propre vérifiant les hypothèses de l'assertion (A).

On sait construire comme en 4) un champ de vecteurs V sur $X|_{T_2}$ qui se projette sur le champ uniforme $\frac{\partial}{\partial t_2}$ de T_2 et tel que pour tout $x \in X|_{T_2} \cap Y^I$, $V(x)$ appartienne à $T_x Y^I$, de sorte que l'intégration de ce champ fournisse la trivialisation :

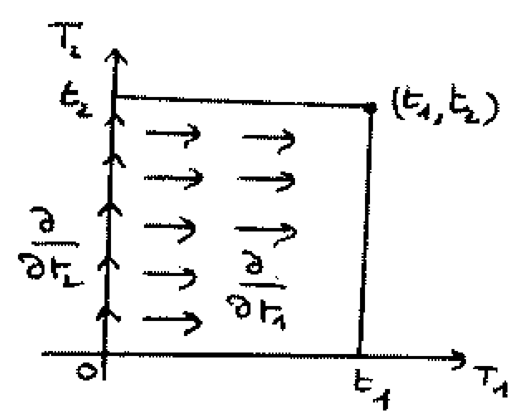
$$\begin{array}{ccc} X|_{T_2} \supset \pi^{-1}(\{0\} \times U_2) & \xleftarrow[\sim]{\varphi} & U_2 \times X_0 \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U_2 & & \end{array} \qquad \text{(diag.1)}$$

au dessous d'un voisinage ouvert relativement compact U_2 de 0 dans T_2, et où $X_0 = \pi^{-1}(0) \subset X$.
Ce diagramme reste commutatif si l'on remplace X par $X \setminus Y$.

Construisons un difféomorphisme Ψ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \supset \pi^{-1}(U_1 \times U_2) & \xleftarrow[\sim]{\Psi} & U_1 \times \pi^{-1}(\{0\} \times U_2\} \\ \pi \downarrow & \swarrow id \times \pi_2 \ (\text{où } \pi_2 = pr_2 \circ \pi) & \\ U_1 \times U_2 & & \end{array} \qquad \text{(diag.2)}$$

Les conditions (a) et (b) de l'assertion (A) montrent que l'on peut construire un champ de vecteurs V sur X qui se projette sur le champ uniforme $\frac{\partial}{\partial t_1}$ et tel que pour tout $x \in Y^I$ l'on ait $V(x) \in T_x Y^I$.
L'intégration de ce champ donne l'application $\Psi(t_1, y)$ définie sur $U_1 \times \pi^{-1}(\{0\} \times U_2)$ puisque $\pi^{-1}(\{0\} \times U_2)$ est relativement compact.



La commutativité du diagramme 2 se vérifie directement : si $y \in \pi^{-1}(\{0\} \times U_2)$ notons $\pi(y) = (0, t_2)$ où $t_2 \in T_2$.
On a :

$$\frac{d}{dt}(\pi \circ \Psi_y) = (\pi \circ \Psi_y)_* \left(\frac{d}{dt}\right) = \pi_* (V(\Psi_y(t))) = \frac{\partial}{\partial t_1}$$

ie $\frac{d}{dt}(\pi \circ \Psi_y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\pi \circ \Psi_y(t) = (t + k_y, k'_y)$ k_y et k'_y étant des constantes.

Si $t=0$ $\pi \circ \Psi_y(0) = \pi(y) = (0, t_2)$ donc $\pi \circ \Psi_y(t) = (t, t_2)$.

Il ne reste plus qu'à recoller les 2 diagrammes précédents pour obtenir le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X \supset \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) & \xleftarrow[\sim]{\Psi} & U_1 \times \pi^{-1}(\{0\} \times U_2) & \xleftarrow[\sim]{id \times \varphi} & (U_1 \times U_2) \times X_0 \\ \downarrow \pi & \swarrow id \times \pi_2 & & \swarrow pr_1 & \\ U_1 \times U_2 & & & & \end{array}$$

(diag. 3)

Enfin, la condition $V(x) \in T_x Y^I$ pour tout x de X et tout $I \subset \mathbb{N}$ implique que le diagramme 3 obtenu en remplaçant X par $X \setminus Y$ est encore valide, le difféomorphisme $\Psi \circ \varphi$ appliquant alors $U_1 \times U_2 \times (X_0 \setminus Y)$ sur $X \setminus Y \cap \pi^{-1}(U_1 \cap U_2)$.

Cela achève la démonstration du lemme 1.3.1.

CQFD

1.3.2 <u>Proposition</u>

Soient $\pi : X \longrightarrow T$ une application analytique propre entre 2 variétés analytiques complexes, T connexe, Y une hypersurface analytique de X et Σ le sous-ensemble analytique de T obtenu au lemme 1.3.1 p 30.
Si ω désigne une p-forme différentielle holomorphe relative et fermée sur $X^* = X \setminus Y$ (on notera $\omega \in \Omega^p(X^*/T)$) et si h représente une section locale du faisceau

$$H_p\ (X \setminus Y \cap \pi^{-1}(T \setminus \Sigma)\ /\ T \setminus \Sigma)$$

alors l'intégrale :

$$f(t) = \int_{h(t)} \omega$$

définit une fonction analytique multiforme sur $T \setminus \Sigma$.

preuve : Notons $T^* = T \setminus \Sigma$ et $X^*_{T^*} = X^* \cap \pi^{-1}(T^*)$.

a) <u>le lemme 1.3.1 montre que le faisceau $\mathcal{F} = H_p(X^*_{T^*}/T^*)$ est localement constant</u>.

En effet, comme la fibration $\pi : X^*_{T^*} \xrightarrow{C^\infty} T^*$ est localement triviale, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \subset X^*_{T^*} & \xrightarrow[\text{difféo}]{\varphi} & U \times Z_0 \\ \pi \downarrow & \swarrow_{pr_1} & \\ U & & \end{array}$$

où Z_0 désigne une variété fixée dépendante de l'ouvert U, et où les ouverts U décrivent un recouvrement de T^*. On peut supposer que les ouverts U sont des boules ouvertes.
Fixons U. Pour tout ouvert V inclus dans U, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(V) &= H_{p+r}(X^*_{T^*}, X^*_{T^* \setminus V}) \\ &= H_{p+r}(\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U \setminus V)) \quad \text{par excision de } \pi^{-1}(T^* \setminus U) \\ &= H_{p+r}(U \times Z_0, (U \setminus V) \times Z_0) \end{aligned}$$

La formule de Künneth donne :

$$\mathcal{F}(V) = \sum_{k=0}^{p+n} H_{p+n-k}(Z_\circ) \otimes H_k(U, U\setminus V) \oplus \sum_{k=0}^{p+n-1} \mathrm{Tor}\left(H_{p+n-1-k}(Z_\circ), H_k(U, U\setminus V)\right)$$

et $(U, U\setminus V)$ est de même type homotopique que (B^n, S^{n-1}) où B^n désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et S^{n-1} son bord.
(Ici, on a posé $n = \dim_{\mathbb{R}} T$)
Mais $H_k(B^n, S^{n-1}) = \delta_{kn}\mathbb{Z}$ où δ_{kn} est le symbole de Kronecker, donc :

$\mathcal{F}(V) = H_p(Z_\circ)$ représente toujours le même groupe abélien pour tout ouvert V (difféomorphe à une boule ouverte) inclus dans U.

b) <u>Toute section locale du faisceau $\mathcal{F}$ se prolonge en une section globale multiforme.</u>

Notons $p : \tilde{T}^* \longrightarrow T^*$ le revêtement universel de T^*. On est assuré de son existence en supposant que T est connexe.
Observons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{\ \tilde{p}\ } & p^{-1}(\mathcal{F}) \\ {\scriptstyle h}\nearrow\ \downarrow & & \downarrow\ \nwarrow{\scriptstyle \tilde{h} = h\circ p} \\ U \subset T^* & \xleftarrow{\ p\ } & \tilde{T}^* \end{array}$$

Comme $\mathcal{F}$ est un faisceau localement constant, le faisceau réciproque $p^{-1}(\mathcal{F})$ est localement constant de base simplement connexe, donc toute section locale de $p^{-1}(\mathcal{F})$ se prolonge en une section globale.
En particulier, $\tilde{h} = h\circ p$ définit une section sur un ouvert U^* de $\tilde{T}^*$ (choisi de sorte que $p|_{U^*} : U^* \longrightarrow U$ soit un isomorphisme) qui se prolonge en une section globale de $p^{-1}(\mathcal{F})$ que nous noterons encore $\tilde{h}$, pour simplifier.

c) <u>Conclusion</u> : Pour montrer que $f(t)$ est analytique multiforme sur T^* il suffit de vérifier que $f\circ p(x)$ est analytique sur le revêtement universel $\tilde{T}^*$ de T^*. Or :

$$f\circ p(x) = \int_{h(p(x))} \omega = \int_{\tilde{h}(x)} \omega$$

où $\tilde{h}$ est une section globale du faisceau $p^{-1}(\mathcal{F})$ sur $\tilde{T}^*$, de sorte que le lemme 1.1.3 permette de conclure. CQFD

1.3.3 Formes différentielles multiformes

Soient X une variété analytique complexe connexe, x_0 un point de X et $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ un chemin (continu) de X d'origine x_0.
On peut étendre la définition du prolongement analytique d'un germe de fonction analytique le long d'un chemin au cas d'un germe de forme différentielle holomorphe.
Plus précisemment :

Définition :

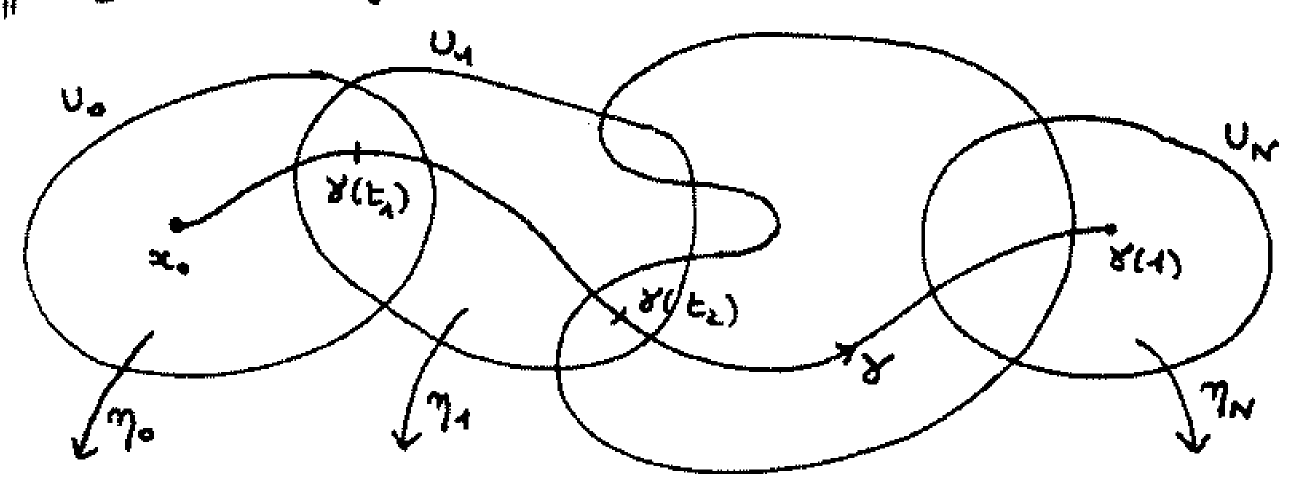
Si ω_0 désigne un germe de p-forme différentielle holomorphe en x_0, on dit que le germe $(\omega_0)_\gamma$ de p-forme différentielle holomorphe en $\gamma(1)$ est obtenu par prolongement analytique du germe ω le long du chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ si :

1) Il existe des ouverts $U_0, U_1, \ldots, U_N$ de X et une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N < t_{N+1} = 1$ telle que $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_k$ pour $0 \leq k \leq N$,

2) Il existe des p-formes différentielles holomorphes η_k définies sur U_k $(0 \leq k \leq N)$ telles que :

* $\eta_k = \eta_{k+1}$ sur $U_k \cap U_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq N-1$

* η_0 induise le germe ω_0 en x_0 et η_N induise le germe $(\omega_0)_\gamma$ en $\gamma(1)$.



Remarque : Supposons que $X = \mathbb{C}^n \setminus Y$ où Y désigne une hypersurface analytique de $\mathbb{C}^n$, les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{C}^n$ étant donc choisies une fois pour toute.

Alors le germe ω_o de p-forme différentielle holomorphe en x_o se prolonge analytiquement le long de γ pour donner naissance au germe $(\omega_o)_\gamma$ au point $\gamma(1)$ si et seulement si, en notant ω la forme différentielle définissant ω_o et définie sur un voisinage ouvert convenable U de x_o et si

$$(*) \qquad \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x) \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

pour $x \in U$, chaque fonction analytique $\omega_{i_1 \ldots i_p}(x)$ définit un germe $\omega_{i_1 \ldots i_p, o}$ de fonction analytique en x_o qui se prolonge analytiquement le long de γ.
De plus, avec les notations précédentes, on a :

$$(\omega_o)_\gamma = \sum (\omega_{i_1 \ldots i_p, o})_\gamma \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Revenons au cas général :
Le théorème de monodromie asserte que le prolongement analytique de ω_o le long de 2 chemins homotopes comme chemins à extrémités fixes, est le même.

<u>Définition</u> :

Une p-forme <u>différentielle multiforme</u> sur X est la donnée d'un germe de p-forme différentielle holomorphe en un point x_o de X qui se prolonge le long de tout chemin γ de X d'origine x_o.
On notera $\Omega^p_{Mo}(X)$ l'espace des p-formes différentielles multiformes sur la variété connexe X.

Soit $\omega \in \Omega^p_{Mo}(X)$ et $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ une carte de X dont le domaine U est simplement connexe.
ω admet alors des déterminations holomorphes sur U. Notons encore ω une telle détermination. On a dans U :

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x) \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

où $\omega_{i_1 \ldots i_p}(x)$ désignent des fonctions analytiques sur U.

Définition :

On dit que la p-forme différentielle multiforme ω sur X est de détermination finie si le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des déterminations de ω sur tout ouvert simplement connexe de X est de dimension finie.

Soit $q : \tilde{X} \to X$ le revêtement universel de X. Fixons $x_0 \in X$. On peut définir $\tilde{X}$ comme l'ensemble des couples $\tilde{x} = (x, \gamma)$ tels que $x \in X$ et où γ désigne une classe d'homotopie d'un chemin de X d'origine x_0 et d'extrémité x que l'on notera encore abusivement γ. Avec cette description de $\tilde{X}$, on a $q(x, \gamma) = x$.
Choisissons une carte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ de X en x de domaine U connexe et simplement connexe. Il existe alors un voisinage ouvert $\tilde{U}$ de $\tilde{x} = (x, \gamma)$, où γ est fixé, tel que $q|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ soit un isomorphisme analytique.
$(\tilde{U}, x_1 \circ q, \dots, x_n \circ q)$ est une carte de $\tilde{X}$ et l'on peut définir une forme différentielle $\tilde{\omega}$ sur $\tilde{U}$ en posant :

$$\tilde{\omega} = (q|_{\tilde{U}})^* \omega$$

où ω désigne une détermination quelconque de la forme multiforme ω sur U.
En coordonnées locales, on aura :

$$\forall \tilde{z} \in \tilde{U} \qquad \tilde{\omega}(\tilde{z}) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} \omega_{i_1 \dots i_p}(z)\, d(x_{i_1} \circ q) \wedge \dots \wedge d(x_{i_p} \circ q)$$

en posant $z = q(\tilde{z})$ et avec les notation (*) précédentes.

Il est facile de voir que cette forme différentielle se prolonge analytiquement sur tout chemin de $\tilde{X}$ pour donner naissance à une forme différentielle multiforme que nous noterons encore $\tilde{\omega}$ pour simplifier. Comme $\tilde{X}$ est simplement connexe, $\tilde{\omega}$ sera en fait une forme différentielle holomorphe sur $\tilde{X}$.

On aurait évidemment obtenu une autre forme $\tilde{\omega}$ si l'on était parti d'une détermination différente de ω sur U.

Inversement, il est facile d'associer une p-forme différentielle multiforme sur X à toute p-forme différentielle holomorphe sur $\tilde{X}$.

Finalement, il existe une surjection canonique de $\Omega^p(\tilde{X})$ sur $\Omega^p_{Mo}(X)$, et se donner une forme différentielle multi-forme sur X revient pratiquement à se donner une forme différentielle holomorphe sur le revêtement universel $\tilde{X}$ de X.

Remarque :

Si $\omega \in \Omega^p_{Mo}(X)$ est l'image de $\tilde{\omega} \in \Omega^p(\tilde{X})$ par la surjection canonique $\Omega^p(\tilde{X}) \twoheadrightarrow \Omega^p_{Mo}(X)$, on aura localement :

$$q^*\omega = \tilde{\omega}$$

où $q^*\omega$ désigne le pull-back de ω par q.

Plus précisemment, cela signifie que pour toute détermination holomorphe ω de $\omega \in \Omega^p_{Mo}(X)$ sur un domaine simplement connexe U d'une carte (U, φ) de X l'on peut trouver un ouvert $\tilde{U}$ de $\tilde{X}$ au dessus de U tel que $q|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow U$ soit un isomorphisme analytique et

$$(q|_{\tilde{U}})^*\omega = \tilde{\omega}|_{\tilde{U}}$$

Finissons ces rappels par la définition d'une p-forme différentielle multiforme relative :

Définition :

Soit $\pi : X \to T$ une application analytique. L'ensemble $\Omega^p_{Mo}(X/T)$ des p-formes différentielles multiformes relatives sur X (resp. fermées) (pour π) est, par définition, l'image de l'espace $\Omega^p(\tilde{X}/T)$ des p-formes différentielles holomorphes relatives (resp. de l'espace des p-formes holomorphes relatives et fermées) sur $\tilde{X}$ (pour $\pi \circ q$) par la surjection canonique :

$$\Omega^p(\tilde{X}) \twoheadrightarrow \Omega^p_{Mo}(X)$$

1.3.4 Proposition

Soient $\pi : X \longrightarrow T$ une application analytique propre entre 2 variétés analytiques complexes et connexes, Y une hypersurface analytique de X et Σ le sous-ensemble analytique de T obtenu au lemme 1.3.1.
Notons $X^* = X \setminus Y$ et $q : \tilde{X}^* \longrightarrow X^*$ le revêtement universel de X^*, $T^* = T \setminus \Sigma$ et $(\tilde{X}^*)_{T^*} = \tilde{X}^* \cap (\pi \circ q)^{-1}(T^*)$.
Soient ω une p-forme différentielle multiforme relative et fermée sur X^* (ie, d'après 1.3.3, la donnée d'une p-forme holomorphe relative et fermée $\tilde{\omega}$ sur $\tilde{X}^*$) et $\tilde{h}$ une section locale du faisceau d'homologie $H_p((\tilde{X}^*)_{T^*}/T^*)$.
Alors :

(1) $f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega}$ est une fonction analytique multiforme sur T^*.

(2) Si ω est de détermination finie, $f(t)$ l'est aussi.

preuve :

(1) $$\pi \circ q : (\tilde{X}^*)_{T^*} \xrightarrow{q} X^*_{T^*} = X^* \cap \pi^{-1}(T^*) \xrightarrow{\pi} T^*$$

est une fibration C^∞ localement triviale puisque c'est le revêtement d'une fibration localement triviale, de sorte que la démonstration de la Prop. 1.3.2 puisse se refaire sans changements :
Le faisceau $\mathcal{F} = H_p((\tilde{X}^*)_{T^*}/T^*)$ est localement constant, donc toute section locale $\tilde{h}$ de $\mathcal{F}$ se prolonge en une section globale multiforme, ie en une section globale de $p^{-1}(\mathcal{F})$ définie sur tout le revêtement universel $\tilde{T}^*$ de T^* (on note : $p : \tilde{T}^* \longrightarrow T^*$ ce revêtement universel).
Finalement $f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega}$ est une fonction analytique multiforme grâce au lemme 1.1.3.

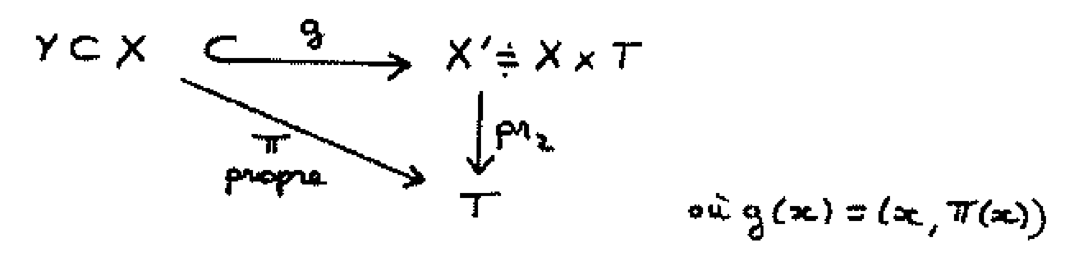
1.3.5 Remarque : D'après ce qui précède, toute section locale $\tilde{h}$ du faisceau $\mathcal{F} = H_p((\tilde{X}^*)_{T^*} / T^*)$ se prolonge en une section multiforme de $\mathcal{F}$, ie en une application continue $\check{\tilde{h}}$ de $\tilde{T}^*$ dans l'espace total $\dot{\bigcup}_{t \in T^*} H_p(\tilde{X}^*_t)$ de $\mathcal{F}$ qui vérifie la condition :

$$\forall \check{t} \in \tilde{T}^* \qquad \check{\tilde{h}}(\tilde{t}) \in H_p(\tilde{X}^*_{p(\tilde{t})})$$

Dans la suite de la démonstration on notera abusivement $\tilde{h}(t)$ au lieu de $\check{\tilde{h}}(\tilde{t})$ puisque localement aucune confusion n'est à craindre, $p : \tilde{T}^* \longrightarrow T^*$ étant un homéomorphisme local.

(2) <u>ω de détermination finie $\Rightarrow f(t)$ aussi</u> :

Le cobord de Leray nous permet de nous ramener au cas où X est un produit et où π est la projection canonique.
En effet, plaçons nous dans les hypothèses de la prop. 1.3.4 et considérons le diagramme commutatif :



Notons $h(t) = q_* \tilde{h}(t)$ la classe correspondante à $\tilde{h}(t)$ dans $H_p(X^*_t)$.
On peut écrire :

$$f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega} = \int_{h(t)} \omega$$

puisque $\tilde{\omega} = q^* \omega$ localement, quitte à donner un sens à l'intégrale $\int_{h(t)} \omega$ en recouvrant le compact $h(t)$ par un nombre fini d'ouverts simplement connexes sur lesquels ω possède des déterminations holomorphes.

Remarquons bien que T^* est inclus dans l'ensemble des valeurs régulières de π et posons :

$\dim_{\mathbb{C}} T = r$

$T = T_1 \times \dots \times T_r$ où $\dim_{\mathbb{C}} T_i = 1$

$$\begin{aligned} \pi : \quad X &\longrightarrow T = T_1 \times \dots \times T_r \\ x &\longmapsto \pi(x) = (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{aligned}$$

Pour $t = (t_1, \dots, t_r) \in T^*$, les sous-variétés analytiques $\pi_i^{-1}(t_i)$, $1 \leq i \leq r$, sont de codimension complexe 1 et se coupent en position générale. On peut donc écrire la formule des résidus composés de Leray ([PHA] III 4 p 60) :

$$f(t) = \int_{h(t)} \omega = \frac{1}{(i2\pi)^r} \int_{\delta^r h(t)} \frac{\omega \wedge d\pi_1 \wedge \dots \wedge d\pi_r}{(t_1 - \pi_1) \dots (t_r - \pi_r)}$$

où $\delta^r : H_p(X_t^*) \longrightarrow H_{p+r}(X^* \setminus (\pi_1^{-1}(t_1) \cup \dots \cup \pi_r^{-1}(t_r)))$ désigne le cobord composé de Leray.

Notons :

$$\begin{cases} h'(t) = \delta^r h(t) \\ \omega' = \dfrac{\omega \wedge d\pi_1 \wedge \dots \wedge d\pi_r}{(t_1 - \pi_1) \dots (t_r - \pi_r)} \\ X' = X \times T \\ Y' = (Y \times T) \cup \{(x,t) / \pi_1(x) = t_1\} \cup \dots \cup \{(x,t) / \pi_r(x) = t_r\} \\ X'^* = X' \setminus Y' \end{cases}$$

Y' est une hypersurface analytique de X' et ω' apparaît comme une $(p+r)$-forme différentielle relative multiforme et fermée sur X'^*.

Notons aussi que :

$$X'^*_t = (X \times T)_t \setminus Y'_t \simeq X^* \setminus (\pi_1^{-1}(t_1) \cup \dots \cup \pi_r^{-1}(t_r))$$

de sorte que $h'(t) \in H_{p+r}(X'^*_t)$

L'égalité précédente s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{(i2\pi)^r} \int_{h'(t)} \omega'$$

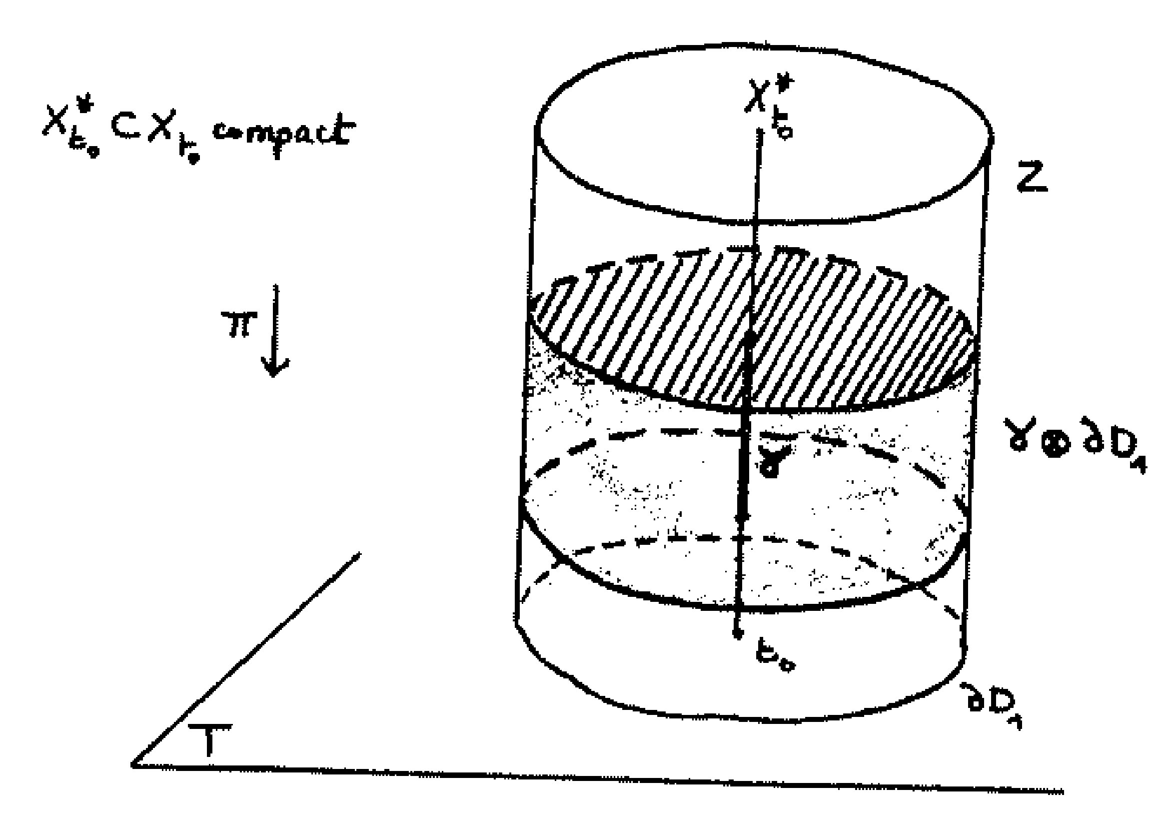
et tout revient à montrer que la fonction analytique multiforme $t \longmapsto \int_{h'(t)} \omega'$ est de détermination finie dès que ω, et donc ω', l'est.

pr_2 n'est plus propre mais un représentant de $h'(t) = \delta^\wedge h(t)$ est obtenu en "fibrant" un représentant $\gamma(t)$ de $h(t)$ par le produit orienté de r cercles trigonométriques $\partial D_1 \otimes \ldots \otimes \partial D_r$ dans T.

Si t_0 est fixé dans T^*, on peut choisir ces cercles ∂D_i de centre $t_{0,i}$ une fois pour toute, de sorte que l'on ait

$$h'(t) = [\ \gamma(t) \otimes \partial D_1 \otimes \ldots \otimes \partial D_r\ ]$$

pour tout t appartenant au voisinage ouvert $U = D_1 \times \ldots \times D_r$ de t_0 dans T (cf. fig.1) ([PHA] III 4.2 p 61)



(fig.1) : Dessin pour $\dim_{\mathbb{C}} T = 1$.

Comme X_{t_0} est compact (cf π propre), le support du cycle $\gamma'(t) = \gamma(t) \otimes \partial D_1 \otimes \ldots \otimes \partial D_r$ est toujours inclus dans un même sous-ensemble analytique compact Z de $X \setminus X_t$ pour tout $t \in U$.

<u>Envisageons maintenant le problème sur $X' = X \times T$ avec $f(t) = \int_{h'(t)} \omega'$</u>

Fixons t_0 dans T^* ainsi que le voisinage U de t_0 obtenu précédemment. Si $t \in U$, on peut considérer que Z est inclus dans la fibre X'_t

La fibre $X'_t \simeq X$ admet une triangulation semi-analytique $\{\sigma_j\}_{j \in J}$ compatible avec la famille de sous-ensembles analytiques $\{Z, Y'_t\}$ (cf. 0.3).
Comme Z est compact, la triangulation de X'_t induit une triangulation finie $\{\sigma_j\}_{j \in J_0}$ de $Z \setminus Y'_t$ (où $J_0 \subset J$ et J_0 fini)

Comme $h'(t) = [\gamma'(t)]$ où $\mathrm{Supp}\, \gamma'(t) \subset Z \setminus Y'_t$, on peut toujours exprimer $h'(t)$ en n'utilisant que les simplexes σ_j de la triangulation $\{\sigma_j\}_{j \in J_0}$ ([SPA] Th 8 p 171 et 8 p 191), ie :

$$\forall t \in U \qquad h'(t) = \Big[\sum_{j \in J_0} b_j \sigma_j\Big] \qquad \text{où } b_j \in \mathbb{Z}$$

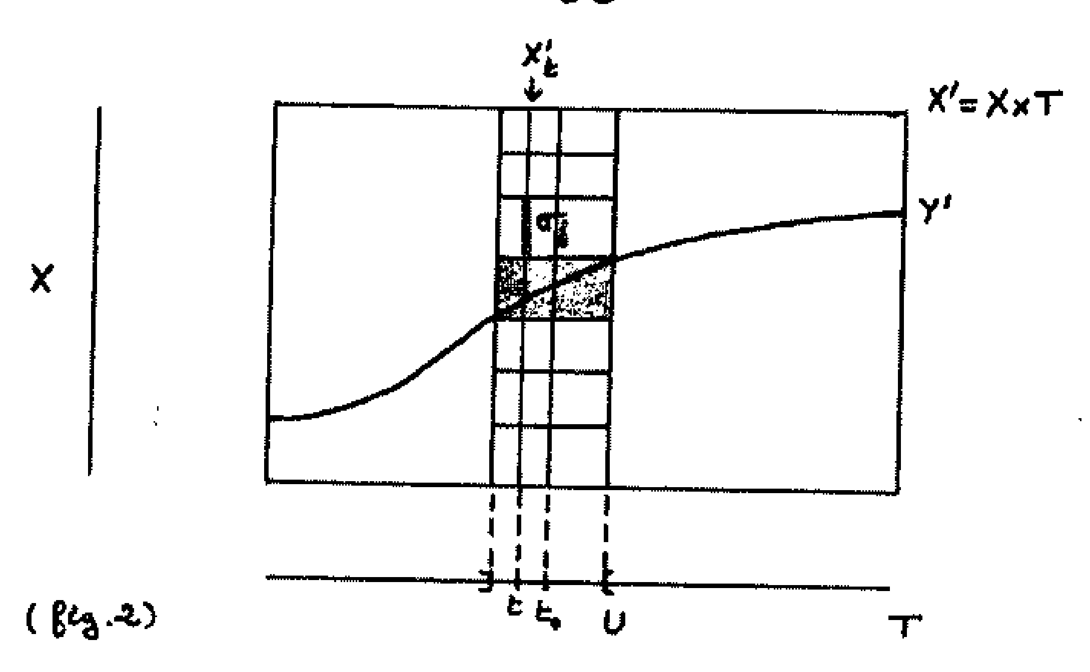
Un argument de déformation-rétraction montre que la classe $h'(t_0)$ peut toujours s'écrire

$$h'(t_0) = \Big[\sum_{j \in J_1} b_j \sigma_j\Big]$$

où $J_1 = \{j \in J_0 \ / \ \sigma_j \cap \mathrm{St}\, Y = \emptyset\}$ et où $\mathrm{St}\, Y$ désigne l'étoile de Y.
En choisissant le voisinage U de t_0 encore plus petit, on aura pour tout $t \in U$:

$$h'(t) = \Big[\sum_{j \in J_1} b_j \sigma_j\Big]$$

Les coefficients entiers b_j sont indépendants de $t \in U$ puisque $h'(t)$ est une classe d'homologie dépendant continûment de t.



(fig. 2)

On obtient : $$f(t) = \sum_{j \in J_1} b_j \int_{\sigma_j} \omega'$$

Dans l'écriture $\int_{\sigma_j} \omega'$, $j \in J_1$, ω' désigne une détermination de la forme différentielle ω' sur un voisinage produit simplement connexe de la forme $U \times V_j$ de σ_j dans X'^*.

Notons $\mathcal{V}$ le faisceau localement constant d'espaces vectoriels de dimension finie sur X'^* engendré par les déterminations de ω'. C'est un sous-faisceau de $\Omega^p(X'^*/T)$. Notons $\Gamma(U \times V_j, \mathcal{V})$ l'ensemble des sections de $\mathcal{V}$ définies sur $U \times V_j$. Comme ω' est de détermination finie, il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall j \in J_1 \quad \exists\, \omega_1^j, \dots, \omega_\mu^j \in \Gamma(U \times V_j, \mathcal{V}) \quad \forall \omega' \in \Gamma(U \times V_j, \mathcal{V})$$

$$\exists\, \lambda_1^j, \dots, \lambda_\mu^j \in \mathbb{C} \qquad \omega' = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \lambda_\lambda^j \omega_\lambda^j$$

Finalement, $$f(t) = \sum_{\substack{j \in J_1 \\ 1 \leq \mu \leq \lambda}} b_j \lambda_\lambda^j \int_{\sigma_j} \omega_\lambda^j$$

de sorte que la famille finie de germes de fonctions holomorphes $\left\{ \int_{\sigma_j} \omega_\lambda^j \right\}_{j,\mu}$ engendre l'espace vectoriel des déterminations de f en t_0.

[Vérifions que $\int \omega_\lambda^j$ est bien un germe de fonction analytique en t_0 : on devrait écrire rigoureusement $\int_{\sigma_j} \omega_\lambda^j = \int_{\sigma_j \times t} \omega_\lambda^j = \int_{\sigma_j \times t_0} \tau_t^* \omega_\lambda^j$ où τ_t est la translation $\tau_t(x, t_0) = (x, t)$.

Si $\omega_\lambda^j(x,t) = \sum \omega_{i_1 \dots i_p}(x,t)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ localement, on a $\tau_t^* \omega_\lambda^j(x, t_0) = \sum \omega_{i_1 \dots i_p}(x,t)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ de sorte que $\tau_t^* \omega_\lambda^j$ soit une forme différentielle dépendant holomorphiquement de t. Le lemme 1.1.1 montre bien que $\int_{\sigma_j \times t} \omega_\lambda^j$ est une fonction analytique en t pour $t \in U$]

CQFD

1.4 <u>Cas local II</u>

Envisageons maintenant le cas suivant local à la source et où le but est de dimension 1 :

" Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0, $\tilde{Y}$ une hypersurface analytique de U et $\pi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application analytique telle que $\pi(0) = 0$."

Le Théorème de Fibration de Lê ([LD7]) montre qu'il est possible de choisir une boule fermée $\bar{X}$ de U de centre 0 et de rayon ε et un disque ouvert D de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon η (ε suffisamment petit et η suffisamment petit devant ε) tels que, si D^* désigne le disque épointé $D\setminus\{0\}$, si X désigne l'intérieur de $\bar{X}$ et si l'on note $Y = \tilde{Y} \cap X$, l'application :

$$\pi : \quad X \setminus Y \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^* \qquad (1)$$

soit une fibration topologique localement triviale.

La démonstration de ce Théorème qui fait intervenir une stratification de Whitney de la paire $(U, \tilde{Y})$ vérifiant la condition A_π de Thom et qui utilise le 1- Théorème d'isotopie de Thom-Mather, a été détaillée dans l'Appendice.
On remarquera notamment, et cela nous sera utile dans la section 3.3, que la preuve donnée en appendice montre aussi que l'application $\pi : \bar{X} \setminus \bar{Y} \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^*$ (où $\bar{Y} = \tilde{Y} \cap \bar{X}$) est une fibration topologique localement triviale qui respecte le bord ∂X de X.

Le lemme suivant jouera le rôle tenu par le lemme 1.3.1 dans le cas I précédent :

1.4.1 <u>Lemme</u> :

Dans la situation II, ie lorsque U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0, $\pi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application analytique vérifiant $\pi(0) = 0$ et si $\tilde{Y}$ est une hypersurface analytique de U, il existe une boule fermée $\bar{X}$ de U de centre 0

et d'intérieur X et un disque ouvert D de $\mathbb{C}$ de centre 0 tels que, en notant $D^* = D \setminus \{0\}$, l'application :

$$\pi : X \setminus Y \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^* = D \setminus \{0\}$$

soit une fibration topologique localement triviale.
(où $Y = \tilde{Y} \cap X$ désigne la trace de Y sur X).

On peut maintenant donner les énoncés suivants analogues des prop. 1.3.2 et 1.3.4 dans le cas local II :

1.4.2 Proposition :

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0, $\pi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application analytique vérifiant $\pi(0) = 0$, $\tilde{Y}$ une hypersurface analytique de U, $\bar{X}$ et D les boules de $\mathbb{C}^n$ et de $\mathbb{C}$ respectivement définies dans le lemme 1.4.1. Les notations sont celles du lemme 1.4.1.
Si ω désigne une p-forme différentielle holomorphe relative et fermée sur $X^* = X \setminus Y$ (ie $\omega \in \Omega^p(X^*/D)$) et si h représente une section locale du faisceau $H_p(X^* \cap \pi^{-1}(D^*)/D^*)$, alors l'intégrale :

$$f(t) = \int_{h(t)} \omega$$

définit une fonction analytique multiforme sur D^*.

preuve :
Notons bien que le faisceau $H_p(X^* \cap \pi^{-1}(D^*)/D^*)$ est bien défini car π induit une submersion de $X^* \cap \pi^{-1}(D^*)$ sur D^* d'après un Théorème du type Bertini, pour D assez petit.
Ce faisceau est encore localement constant grâce au lemme 1.4.1, de sorte que la démonstration soit la même que celle de la prop. 1.3.2.

CQFD

1.4.3 Proposition :

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0, $\pi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application analytique vérifiant $\pi(0) = 0$, $\tilde{Y}$ une hypersurface analytique de U, $\bar{X}$ et D les boules de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}$ respectivement définies au lemme 1.4.1.
Notons X l'intérieur de $\bar{X}$, $Y = \tilde{Y} \cap X$, $X^* = X \setminus Y$ et $q : \tilde{X}^* \longrightarrow X^*$ le revêtement universel de X^*, $D^* = D \setminus \{0\}$ et $(\tilde{X}^*)_{D^*} = \tilde{X}^* \cap (\pi \circ q)^{-1}(D^*)$
Soient ω une p-forme différentielle multiforme relative et fermée sur X^* (ie d'après 1.3.3 la donnée d'une p-forme holomorphe $\tilde{\omega}$ relative et fermée sur $\tilde{X}^*$) et $\tilde{h}$ une section locale du faisceau $H_p((\tilde{X}^*)_{D^*} / D^*)$.
Alors :

(1) $f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega}$ est une fonction analytique multiforme sur D^*,

(2) Si ω est de détermination finie, $f(t)$ l'est aussi.

preuve :
Elle est identique à celle de la Proposition 1.3.4 avec $\Sigma = \{0\}$. Il suffit de remplacer, dans la preuve de (2), la phrase "Comme X_{t_0} est compacte ..." par : "Comme $\bar{X}_{t_0}$ est compacte, le triple de sous-ensembles semi-analytiques $(\bar{X}_{t_0}, X_{t_0}, X_{t_0} \cap Y)$ admet une triangulation semi-analytique finie".

CQFD

Remarque : La suite de cette proposition constitue le Théorème 3.2.

Chapitre 2 : Notion de Croissance Modérée.

Les notions de fonctions analytiques multiformes et de détermination finies sont supposées connues ([FAT]).
Si X est une variété analytique complexe connexe, on notera MO(X) l'espace des fonctions analytiques multiformes sur X.

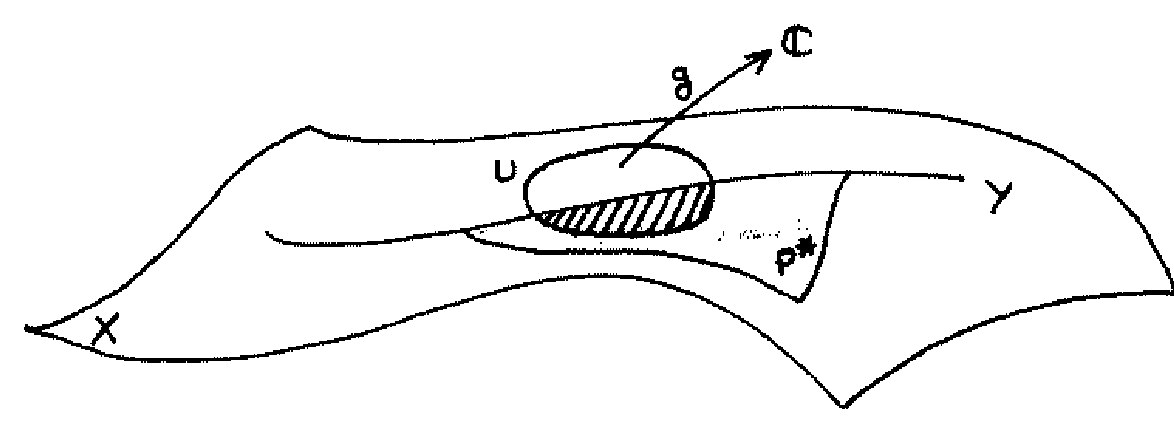
2.1 Définition de la croissance modérée ([DEL] 2.10)

Soient X une variété analytique complexe connexe et Y une hypersurface analytique de X. Une fonction analytique multiforme $F \in MO(X \setminus Y)$ est dite à croissance modérée le long de Y si pour toute partie P semi-analytique compacte de X telle que $P^* = P \setminus Y$ soit simplement connexe, pour toute détermination f de F sur P^* et pour tout ouvert U de X tel que

$$Y \cap U = \{x \in U \ / \ g(x) = 0 \quad \text{où } g \in \mathcal{O}(U)\}$$

$\mathcal{O}(U)$ désignant l'espace des fonctions holomorphes sur U, on a :

$$\exists w \in \mathbb{N} \quad \exists c \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in P^* \cap U \qquad |f(x)| \leq \frac{c}{|g(x)|^w} \qquad (1)$$



exemples : z^σ $(\sigma \in \mathbb{C})$ et $\ln z$ sont les 2 prototypes de fonctions analytiques multiformes à croissance modérée sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dans un sens précisé au Théorème 2.2.1

2.1.1 <u>Remarque</u> :

La définition 2.1 peut être donnée pour un sous-ensemble analytique complexe quelconque de X. Il suffit de considérer p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$ sur U telles que :

$$Y \cap U = \{x \in U \,/\, f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0\}$$

et remplacer (1) par : $\quad |f(x)| \leq \dfrac{c}{\left(\sum_{i=1}^{p} f_i(x)\overline{f_i(x)}\right)^{w}} \quad$ (1')

2.1.2 <u>Remarque</u> :

Il suffit de vérifier la condition (1) pour tous les ouverts U d'un recouvrement quelconque de X et de considérer seulement une équation de $Y \cap U$ dans U.
En effet, si $Y \cap U = \{x \in U \,/\, g(x) = 0\} = \{x \in U \,/\, h(x) = 0\}$, le Théorème des zéros d'Hilbert en version analytique montre l'existence d'une fonction holomorphe $a(x)$ sur un voisinage de x et d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que $h^N(x) = a(x)\, g(x)$, de sorte que la majoration (1) soit encore vraie pour h.

2.1.3 <u>Remarque</u> :

Il suffit de vérifier la condition (1) lorsque P parcourt l'ensemble des simplexes d'une triangulation semi-analytique fixée de la paire (X, Y).
Le § 0.3 rappelle qu'il existe toujours une triangulation semi-analytique (resp. sous-analytique) de la paire (X, Y), ie une triangulation de X compatible avec Y.

Soit $\{P_\nu\}$ une telle triangulation. $P_\nu^* = P_\nu \setminus Y$ est simplement connexe (puisque homéomorphe à un simplexe fermé Δ^p de $\mathbb{R}^p$ auquel on a enlevé un nombre fini de faces) et P_ν est une partie semi-analytique compacte.
Il s'agit de vérifier que la majoration (1) est vraie pour toute partie semi-analytique compacte P de X telle que $P^* = P \setminus Y$ soit simplement connexe.
Comme la famille $\{P_\nu\}$ est localement finie, la famille $\{P_\nu \cap P\}_\nu$ est finie.

Soit f une détermination de F sur P^*. f induit une application holomorphe $f|_{P_\nu \cap P^*}$ sur $P_\nu \cap P^*$ qui se prolonge de façon unique en une détermination f_ν de F sur P_ν^*.

L'inégalité (1) est vérifiée par hypothèse sur tous les ensembles P_ν^* et pour toute détermination f_ν de F sur P_ν^*, de sorte que :

$$\exists\, c_\nu, w_\nu \qquad \forall x \in P_\nu^* \cap U \qquad |f_\nu(x)| \leq \frac{c_\nu}{|g(x)|^{w_\nu}}$$

où g désigne une équation locale de Y sur l'ouvert U telle que $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in U$. Il suffit alors de poser $c = \operatorname{Sup} c_\nu$ et $w = \operatorname{Sup} w_\nu$ pour avoir :

$$\forall x \in P^* \cap U \qquad |f(x)| \leq \frac{c}{|g(x)|^{w}}$$

ce qui prouve la remarque.

2.1.4 Proposition

Soient $\varphi : X' \longrightarrow X$ une application analytique propre entre 2 variétés analytiques complexes connexes telle que $\varphi(Y') = Y$ où Y' (resp. Y) désigne une hypersurface analytique de X' (resp. de X). Supposons que $\varphi : X' \setminus Y' \longrightarrow X \setminus Y$ soit un isomorphisme analytique.
Alors, si l'on identifie $X' \setminus Y'$ et $X \setminus Y$ via φ, les deux notions de croissance modérée, l'une le long de Y et l'autre le long de Y', coïncident.

La preuve de cette proposition est donnée en 2.1.6. Auparavant, faisons quelques remarques :

On est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} Y' \subset X' & \qquad & X' \setminus Y' \xrightarrow{\ F \circ \varphi\ } \mathbb{C} \\ \downarrow \varphi \text{ propre} & & \varphi \downarrow \wr \qquad \nearrow_{F} \\ Y \subset X & & X \setminus Y \end{array}$$

où $F \in MO(X \setminus Y)$.

L'image (resp. l'image réciproque) d'une triangulation de X' (resp. de X) par une application propre est encore une triangulation de X (resp. de X'), mais l'on sait que l'image d'un ensemble semi-analytique par une application propre n'est pas nécessairement semi-analytique, comme le montre le :

2.1.5 <u>Contre exemple</u> :

Soient S^2 la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$ et $\pi = (f_1, f_2, f_3) : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = y\,(e^{x}-1) \\ f_2(x,y,z) = y\,(e^{x\sqrt{2}}-1) \\ f_3(x,y,z) = y\,(e^{x\sqrt{3}}-1) \end{cases}$$

Alors π est un morphisme analytique propre et $\pi(S^2)$ n'est pas semi-analytique en 0.

<u>preuve du contre-exemple</u> :

En faisant tendre x vers $+\infty$ et en notant que $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, on montre facilement le résultat suivant :

(R) : " Si $H(x,y,z)$ est un polynôme homogène à coefficients dans $\mathbb{R}$, alors :

$$H(e^{x}-1,\ e^{x\sqrt{2}}-1,\ e^{x\sqrt{3}}-1) \equiv 0 \Rightarrow H \equiv 0 \text{ "}$$

S'il existait un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et une fonction analytique g définie sur U et à valeur dans $\mathbb{R}$ s'annulant sur $\pi(S^2) \cap U$, on aurait, en notant

$$g(x,y,z) = \sum_{n \geq k} H_n(x,y,z)$$

où $k \geq 1$ et où H_n désigne un polynôme homogène de degré n :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ et voisins de } 0 \qquad \sum_{n \geq k} y^n H_n(e^{x}-1,\ e^{x\sqrt{2}}-1,\ e^{x\sqrt{3}}-1) = 0$$

d'où $H_n(e^{x}-1, e^{x\sqrt{2}}-1, e^{x\sqrt{3}}-1) \equiv 0$ pour tout $n \geq k$, donc $g \equiv 0$ d'après (R).

Finalement, si $\pi(S^2)$ était semi-analytique en 0, $U \cap \pi(S^2)$ serait donné seulement par des inégalités strictes et $\pi(S^2)$ contiendrait un ouvert contenant 0, ce qui est absurde puisque $\pi(S^2)$ est de mesure nulle d'après le Théorème de Sard.

CQFD

C'est pour surmonter cette difficulté que H. Hironaka a introduit la notion d'ensemble sous-analytique qui généralise celle d'ensemble semi-analytique, et telle que l'image d'un ensemble sous-analytique par une application analytique propre soit encore sous-analytique. ([HIR 2] chap 6 ; [HIR 3])

De plus, le théorème de Triangulation (§ 0.3) est encore vrai pour des ensembles sous-analytiques, et la remarque 2.1.3 est encore valable pour une triangulation sous-analytique de la paire (X, Y).

2.1.6 <u>lemme</u>

La définition 2.1 de la croissance modérée est inchangée si l'on remplace les mots "semi-analytiques" par "sous-analytique".

preuve :

Si la condition (1) de la définition 2.1 est satisfaite pour tous les ensembles sous-analytiques, elle l'est à fortiori pour tous les ensembles semi-analytiques.

Inversement, si la condition (1) est vraie pour tous les ensembles semi-analytiques, il suffit de la vérifier sur une triangulation semi-analytique fixée de X d'après la remarque 2.1.3.

Une triangulation semi-analytique est à fortiori une triangulation sous-analytique, de sorte que la remarque 2.1.3 faite pour les ensembles sous-analytiques montre bien que la condition (1) est vérifiée pour tous les sous-ensembles sous-analytiques de X.

CQFD

2.1.7 preuve de la Prop. 2.1.4 :

a) $F\circ\varphi$ à croissance modérée le long de Y' $\Rightarrow$ F à croissance modérée le long de Y :

La remarque 2.1.3 montre qu'il suffit de vérifier la propriété (1) pour les ensembles d'une triangulation semi-analytique $\{P_\nu\}$ convenable de la paire (X,Y).
Soient $\{U_\alpha\}$ un recouvrement d'ouverts de X tels que $Y\cap U_\alpha = \{x\in U_\alpha \;/\; g_\alpha(x)=0\}$ où $g_\alpha\in\mathcal{O}(U_\alpha)$, et f une détermination de F sur $P_\nu^* = P_\nu\setminus Y$.
$\{\varphi^{-1}(U_\alpha)\}$ est un recouvrement d'ouverts de X' et :

$$Y'\cap\varphi^{-1}(U_\alpha) = \{x'\in\varphi^{-1}(U_\alpha) \;/\; g_\alpha\circ\varphi(x')=0\}$$

$f\circ\varphi$ est une détermination de $F\circ\varphi$ sur $\varphi^{-1}(P_\nu)^* = \varphi^{-1}(P_\nu)\setminus Y'$ et $\varphi^{-1}(P_\nu)$ est une partie semi-analytique compacte de X' telle que $\varphi^{-1}(P_\nu)^* = \varphi^{-1}(P_\nu^*)$ soit simplement connexe, de sorte que, par hypothèse, il existe $(c,w)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{N}$ dépendants de $\varphi^{-1}(U_\alpha)$, de $\varphi^{-1}(P_\nu)$ et de $f\circ\varphi$ tels que :

$$\forall x'\in\varphi^{-1}(P_\nu)^*\cap\varphi^{-1}(U_\alpha) \qquad |f\circ\varphi(x')| \leq \frac{c}{|g_\alpha\circ\varphi(x')|^w}$$

L'isomorphisme $\varphi : X'\setminus Y' \longrightarrow X\setminus Y$ induit un isomorphisme entre $\varphi^{-1}(P_\nu)^*\cap\varphi^{-1}(U_\alpha)$ et $P_\nu^*\cap U_\alpha$, de sorte que :

$$\forall x\in P_\nu^*\cap U_\alpha \qquad |f(x)| \leq \frac{c}{|g_\alpha(x)|^w}$$

ce qui prouve a).

b) F à croissance modérée le long de Y $\Rightarrow$ $F\circ\varphi$ à croissance modérée le long de Y' :

Le lemme 2.1.6 et la remarque 2.1.3 montrent qu'il suffit de vérifier l'inégalité (1) pour une triangulation sous-analytique $\{P'_\nu\}$ convenable de X'.

Soit, comme en a), $\{U_\alpha\}$ un recouvrement d'ouverts de X tel que $Y\cap U_\alpha = \{x\in U_\alpha \;/\; g_\alpha(x)=0\}$ où $g_\alpha\in\mathcal{O}(U_\alpha)$.
$\{\varphi^{-1}(U_\alpha)\}$ est alors un recouvrement d'ouverts de X' et une équation de Y' dans $\varphi^{-1}(U_\alpha)$ est donnée par $g_\alpha\circ\varphi$.

Toute détermination de $F\circ\varphi$ sur $P_\nu'^{*}$ est de la forme $f\circ\varphi$ où f désigne une détermination de F sur $\varphi(P_\nu')^{*}$.
L'inégalité (1) obtenue pour les données $\varphi(P_\nu')^{*}$, U_α et f s'écrit :

$$\forall x \in \varphi(P_\nu')^{*} \cap U_\alpha \qquad |f(x)| \leq \frac{c}{|g_\alpha(x)|^{w}}$$

et puisque φ induit un isomorphisme de $P_\nu'^{*} \cap \varphi^{-1}(U_\alpha)$ sur $\varphi(P_\nu')^{*} \cap U_\alpha$:

$$\forall x' \in P_\nu'^{*} \cap \varphi^{-1}(U_\alpha) \qquad |f\circ\varphi(x')| \leq \frac{c}{|g_\alpha\circ\varphi(x')|^{w}}$$

ce qui prouve b), et la Prop. 2.1.4.

2.1.8 <u>Corollaire</u> :
La proposition 2.1.4 montre que l'on peut utiliser le théorème de résolution des singularités de H. Hironaka (§ 0.4) pour se ramener au cas où Y est un diviseur à croisements normaux dans X, ie une hypersurface analytique telle que tout point x de X possède un voisinage ouvert U et un système de coordonnées locales $z_1, \dots, z_n$ dans U qui vérifie :

$$Y \cap U = \{ z \in U \; / \; z_1 \cdot \ldots \cdot z_m = 0 \}$$

2.1.9 <u>Définition</u> :
Soient X une variété analytique complexe connexe et Y un sous-ensemble analytique de X.
Une p-forme différentielle multiforme ω sur $X \setminus Y$ (cf 1.3.3) est dite à <u>croissance modérée le long de Y</u> si pour tout point x de X il existe une carte $(U, \varphi = (z_1, \dots, z_n))$ en x telle que ω s'exprime :

$$\omega(z) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(z) \; dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$$

sur U, où les fonctions holomorphes sur $X \setminus Y$ $\omega_{i_1 \dots i_p}$ sont toutes à croissance modérée le long de Y (au sens de la définition 2.1)

2.1.10 Définition :

Soient X une variété analytique complexe connexe et Y un sous-ensemble analytique de X. Une fonction analytique multiforme sur $X \setminus Y$ (resp. p-forme différentielle multiforme sur $X \setminus Y$) est dite de Classe de Nilsson si elle est de détermination finie et à croissance modérée le long de Y.

La section 2.2 rappelle l'expression de toutes les fonctions analytiques multiformes de détermination finie (resp. et à croissance modérée) sur

$$\{z \in \mathbb{C}^n \ / \ |z_i| < 1 \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{et } z_1 \cdots z_m \neq 0\}$$

Le Théorème 2.2.1 se trouve, par exemple, dans [BJO], mais nous avons préféré développer le raisonnement par récurrence jusqu'au bout.

Enfin la section 2.3 est consacrée au critère de croissance modérée que nous utiliserons de manière essentielle au chapitre 3 pour ramener la démonstration du théorème de régularité au cas où la base est de dimension 1.

Le lecteur pressé ou habitué à ces notions peut directement aller au chapitre 3.

2.2 Caractérisation des fonctions analytiques multiformes de détermination finie dans $\{z \in \mathbb{C}^n / |z_i| < 1 \text{ et } z_1 \cdots z_m \neq 0\}$.

Notations : Dans cette section, on note :

$$X = D^n = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ / \ |z_i| < 1 \quad 1 \leq i \leq n\}$$

$$Y = p^{-1}(0) \quad \text{où } p(z) = z_1 \cdots\cdots z_m$$

$$X^* = D^n \setminus p^{-1}(0) = \{z \in D^n \ / \ z_1 \cdots z_m \neq 0\}$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ et $p = (p_1, \cdots, p_m) \in \mathbb{N}^m$, on pose :

$$\begin{cases} z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots\cdots z_m^{\alpha_m} \\ \ln^p z = \ln^{p_1} z_1 \cdots\cdots \ln^{p_m} z_m \end{cases}$$

Et l'on note plus simplement $D = D^1$ et $D^* = D \setminus \{0\}$.

2.2.1 Théorème

Avec les notations précédentes, on a :

(1) Toute fonction analytique multiforme de détermination finie sur $X^* = D^n \setminus p^{-1}(0)$ est de la forme

$$F(z) = \sum_{(\alpha,p)\in \mathbb{C}^m \times \mathbb{N}^m} g_{\alpha,p}(z)\, z^\alpha \ln^p z \qquad (E)$$

où la somme est finie et où chaque $g_{\alpha,p}(z)$ appartient à l'anneau $\mathcal{O}(X^*)$ des fonctions holomorphes sur X^*.

(2) Soit F une fonction analytique multiforme de détermination finie sur $X^* = D^n \setminus p^{-1}(0)$. Alors F est à croissance modérée (le long de $p^{-1}(0)$) si et seulement si il existe une expression (E) dont toutes les fonctions $g_{\alpha,p}$ sont des fonctions méromorphes sur le disque D^n en entier.

(3) En particulier, F est à croissance modérée sur X^* si et seulement si il existe une expression (E) où toutes les fonctions $g_{\alpha,p}$ sont des fonctions holomorphes sur D^n.

preuve :

(1) Il est clair que toute fonction F définie par une expression (E) est une fonction analytique multiforme de détermination finie.

En effet :

* La famille des fonctions analytiques multiformes de détermination finie est stable par produit et somme,

* z^α, $\ln^p z$ et $g_{\alpha,p} \in \mathcal{O}(X^*)$ sont toutes des fonctions analytiques multiformes de détermination finie sur X^*.

Inversement, soit $F \in MO(D^n \setminus p^{-1}(0))$ de détermination finie et montrons que F s'exprime sous la forme (E) :

1er cas : $n = 1$

Soit $z_0 \in D$. Choisissons une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H_F(z_0)$ engendré par les déterminations de F en z_0 où la matrice T de la transformation de monodromie de F est décrite sous la forme canonique de Jordan. $H_F(z_0)$ est somme directe de sous-espaces invariants de T.
Plaçons nous dans un tel sous-espace W et notons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ une base de W vérifiant :

$$\begin{cases} T\varepsilon_1 = \alpha\,\varepsilon_1 \\ T\varepsilon_j = \alpha\,\varepsilon_j + \varepsilon_{j-1} \qquad (2 \leq j \leq m) \end{cases}$$

Comme $\alpha \in \mathbb{C}^*$, il existe $\sigma \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha = e^{i2\pi\sigma}$. Posons $g_j = z^{-\sigma}\varepsilon_j$ pour $1 \leq j \leq m$, de sorte que l'on ait :

$$\begin{cases} T g_1 = g_1 \\ T g_j = g_j + \alpha^{-1} g_{j-1} \qquad (2 \leq j \leq m) \end{cases}$$

L'égalité $Tg_1 = g_1$ signifie que g est une fonction holomorphe sur D^*. Posons $h_2 = g_2 - \beta g_1 \ln z$ et déterminons $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $Th_2 = h_2$.

On a :
$$\begin{aligned} Th_2 &= Tg_2 - \beta\, Tg_1 \,.\, (\ln z + i2\pi) \\ &= h_2 + (\alpha^{-1} - i2\pi\beta)\, g_1 \end{aligned}$$

et il suffit de prendre $\beta = \dfrac{1}{i2\pi\alpha}$ pour avoir $Th_2 = h_2$

Posons $h_3 = g_3 - \beta g_2 \ln z + A g_1 (\ln z)^2 + B g_1 \ln z$ et déterminons les constantes A et B de sorte que $Th_3 = h_3$.

$$\begin{aligned} Th_3 = {} & g_3 + \alpha^{-1} g_2 - \beta (g_2 + \alpha^{-1} g_1)(\ln z + i2\pi) \\ & + A g_1 (\ln z + i2\pi)^2 + B g_1 (\ln z + i2\pi) \end{aligned}$$

$$Th_3 = h_3 + (4i\pi A - \alpha^{-1}\beta)\, g_1 \ln z + (2i\pi B - 4\pi^2 A - \alpha^{-2})\, g_1$$

Il suffit de prendre $A = -\dfrac{1}{8\pi^2\alpha^2}$ et $B = \dfrac{1}{4i\pi\alpha^2}$

pour avoir $Th_3 = h_3$.

On continue par récurrence en posant :

$$h_j = g_j - \beta g_{j-1} \ln z + g_{j-2} Q_{j,2}(\ln z) + \dots + g_1 Q_{j,j-1}(\ln z)$$

où $Q_{j,v}(\ln z) = c_{j,v,v} (\ln z)^v + \dots + c_{j,v,0} \qquad (2 \leq v \leq j-1)$

Il s'agit de déterminer les coefficients des polynômes $Q_{j,v}$ de façon à avoir $T h_j = h_j$. Montrons que cela est possible :

$$T h_j = g_j + \alpha^{-1} g_{j-1} - \beta (g_{j-1} + \alpha^{-1} g_{j-2})(\ln z + i 2\pi) +$$

$$+ (g_{j-2} + \alpha^{-1} g_{j-3}) Q_{j,2}(\ln z + i2\pi) + \dots + g_1 Q_{j,j-1}(\ln z + i2\pi)$$

$$= h_j + \underbrace{(\alpha^{-1} - \beta i 2\pi)}_{=0} g_{j-1} + \underbrace{(\alpha^{-1} + c_{j,2,2}\, i 4\pi)}_{\substack{=0 \\ (\text{détermine } c_{j,2,2})}} g_{j-2} \ln z$$

$$+ \underbrace{(\alpha^{-1} i 2\pi + c_{j,2,2}(i2\pi)^2 + c_{j,2,1}\, i 2\pi)}_{\substack{=0 \\ (\text{détermine } c_{j,2,1})}} g_{j-2} + \dots$$

On vérifie que l'on peut annuler tous les coefficients des termes en $g_{i-v} (\ln z)^u \quad (0 \leq u \leq v-1)$:

Soit v fixé, $2 \leq v < j-1$. Les termes en g_{i-v} dans $T h_j$ proviennent du prolongement de $g_{j-v} Q_{j,v}(\ln z)$ et $g_{j-v+1} Q_{j,v-1}(\ln z)$, ainsi dans $T h_j - h_j$ les termes en g_{j-v} sont contenus dans l'expression :

$$(g_{j-v+1} + \alpha^{-1} g_{j-v}) Q_{j,v-1}(\ln z + i2\pi) + (g_{j-v} + \alpha^{-1} g_{j-v-1}) Q_{j,v}(\ln z + i2\pi)$$

$$- g_{j,v} Q_{j,v}(\ln z)$$

ou encore dans l'expression :

$$\Big(Q_{j,v}(\ln z + i2\pi) - Q_{j,v}(\ln z) + \alpha^{-1} \underbrace{Q_{j,v-1}(\ln z + i2\pi)}_{\text{coefficients déjà connus}}\Big)\, g_{j-v}$$

Le polynôme $Q_{j,v-1}$ est connu (par hypothèse de récurrence) puisque déjà construit, et α est connu, de sorte que le terme $\alpha^{-1} Q_{j,v-1}(\ln z + i2\pi)$ ne fasse intervenir que des coefficients arbitraires déjà fixés. Or :

$$Q_{j,v}(\ln z + i2\pi) - Q_{j,v}(\ln z) = \sum_{\nu=1}^{v} c_{j,v,\nu} \Big(\sum_{k=0}^{\nu-1} C_\nu^k (i2\pi)^{\nu-k} (\ln z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{v-1} \underbrace{\Big(\sum_{\nu=k+1}^{v} c_{j,v,\nu} C_\nu^k (i2\pi)^{\nu-k} \Big)}_{(*)} (\ln z)^k$$

Le système d'équations (*) en $c_{j,v,\nu}$ est de Cramer : c'est le système diagonal :

$$\begin{cases} c_{j,v,v} C_v^{v-1} (i2\pi) = ** \\ c_{j,v,v-1} C_{v-1}^{v-2} (i2\pi) + c_{j,v,v} C_v^{v-2} (i2\pi)^2 = ** \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{j,v,1}(i2\pi) + \dots + c_{j,v,v-1}(i2\pi)^{v-1} + c_{j,v,v}(i2\pi)^v = ** \end{cases}$$

où les nombres ** proviennent du développement de l'expression $\alpha^{-1} Q_{j,v-1}(\ln z + i2\pi)$.

Il est donc possible d'annuler tous les termes en $g_{j-v}(\ln z)^u$ où $0 \leq u \leq v-1$ dans $Th_j - h_j$ pour $2 \leq v < j-1$.
Si $v = j-1$, les termes en g_1 dans $Th_j - h_j$ sont contenus dans l'expression :

$$\alpha^{-1} g_1 Q_{j,j-2}(\ln z + i2\pi) + g_1 Q_{j,j-1}(\ln z + i2\pi) - g_1 Q_{j,j-1}(\ln z)$$

et un calcul identique au précédent permet d'annuler les coefficients des termes en $g_1(\ln z)^u$ où $0 \leq u \leq j-2$.

Finalement, chacune des fonctions $h_1 = g_1, h_2, \dots, h_m$ sont des fonctions holomorphes sur D^* et :

$$(I) \quad \begin{cases} h_1 = g_1 \\ h_2 = g_2 - \beta g_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ h_j = g_j - \beta g_{j-1} \ln z + g_{j-2} Q_{j-2}(\ln z) + \dots + g_1 Q_{j,j-1}(\ln z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ h_m = g_m - \beta g_{m-1} \ln z + \dots + g_1 Q_{m,m-1}(\ln z) \end{cases}$$

En résolvant en $g_1, \dots, g_m$ on obtient :

$$g_j = \varphi_j(z)\, P_j(\ln z) \qquad 1 \leq j \leq m$$

où $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{O}(D^*)$ et où P_j est un polynôme à coefficients complexes tel que $\deg P_j \leq j-1$.
On possède donc une base $\{ \varepsilon_j = z^{\sigma} \varphi_j(z)\, P_j(\ln z) \ /\ 1 \leq j \leq m \}$ de W et il suffit de recommencer tout ce raisonnement sur chacun des sous-espaces invariants de T pour obtenir l'affirmation (1).

<u>Remarque</u> : Si F est à croissance modérée, chacun des vecteurs de base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ est à croissance modérée donc aussi $g_1, \dots, g_m$ (car z^{σ} est à croissance modérée). Le système (I) montre de proche en proche que chaque fonction h_j est à croissance modérée. Il en est donc de même des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ qui sont polynomiales en $h_1, \dots, h_m$ et $\ln z$ (car $\ln z$ est à croissance modérée).
φ_j $(1 \leq j \leq m)$ représente alors une fonction analytique sur D^* à croissance modérée, donc une fonction méromorphe d'après le lemme qui suit. Cela prouve un sens de l'affirmation (2) du Théorème 2.2.1.

<u>Lemme</u> : Une fonction g analytique sur $D^n \setminus p^{-1}(0)$ est à croissance modérée le long de $p^{-1}(0)$ ssi g se prolonge en une fonction méromorphe sur D^n.

preuve du lemme : On aura $|g(z)\, z_1^{w} \dots z_m^{w}| \leq c$ au voisinage de tout point de D^n, donc $g(z).\, z_1^{w} \dots z_m^{w}$ sera localement bornée sur D^n et le Théorème d'extension de Riemann montre que $g(z).\, z_1^{w} \dots z_m^{w}$ se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe h sur D^n.
CQFD

<u>2e cas : n quelconque</u>

Le groupe fondamental $\pi_1(D^n \setminus p^{-1}(0))$ est un groupe abélien libre de rang m. Si $0 < \varepsilon < 1$ et $z_0 = (\varepsilon, \dots, \varepsilon) \in \mathbb{C}^n$ est fixé, on obtient m générateurs $\{\Gamma_1\}, \dots, \{\Gamma_m\}$ de $\pi_1(D^n \setminus p^{-1}(0))$ en considérant les lacets Γ_j d'origine z_0 définis par

$$z_j(t) = \varepsilon\, e^{i2\pi t} \quad \text{et} \quad z_i(t) = \varepsilon \quad \text{si } i \neq j$$

Soit T_j la transformation de monodromie de F le long de Γ_j.
$T_1, \dots, T_m$ sont des opérateurs linéaires qui commutent 2 à 2 et qui définissent entièrement les prolongations de F.
On reprend alors la démonstration dans le cas où $n = 1$ avec T_1 et z_1 au lieu de T et z, de façon à obtenir une base de W : $\varepsilon_j = z_1^{\tau} \varphi_j(z_1) P_j(\ln z_1)$ $(1 \leq j \leq m')$ où $\varphi_1, \dots, \varphi_{m'}$ sont holomorphes en z_1.
On recommence ce processus pour $T_1, \dots, T_m$, ce qui prouve (1).

(2) La condition nécessaire est montrée ci-dessus. La suffisance provient des remarques suivantes :

* La famille des fonctions analytiques multiformes de détermination finie et à croissance modérée est stable par produit et somme

* z^{α} et $\ln^{p} z$ sont de la classe de Nilsson sur X^*

* voir le lemme énoncé dans la démonstration de (1).

(3) provient facilement de (2). Si (E) est une expression de F où toutes les fonctions $g_{\alpha,p}$ sont méromorphes sur D^n, il existe des entiers naturels $k_1, \dots, k_m$ et des fonctions holomorphes $h_{\alpha,p} \in \mathcal{O}(D^n)$ tels que :

$$g_{\alpha,p}(z) = \frac{h_{\alpha,p}(z)}{z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}}$$

d'où $$F(z) = \sum_{(\alpha,p)} h_{\alpha,p}(z)\, z_1^{\alpha_1 - k_1} \dots z_m^{\alpha_m - k_m} \ln^{p} z$$

CQFD

2.2.2 <u>Unicité du développement</u>

Toute fonction analytique multiforme de détermination finie sur $D^n \setminus p^{-1}(0)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$F(z) = \sum_{(\alpha,p) \in \mathcal{R} \times \mathbb{N}^m} g_{\alpha,p}(z)\, z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m} \ln^{p_1} z_1 \dots \ln^{p_m} z_m \qquad (F)$$

où la somme est finie, où $g_{\alpha,p}(z) \in \mathcal{O}(D^n \setminus p^{-1}(0))$ et où $\mathcal{R}$ désigne une famille de représentants de $\mathbb{C}^m / \mathbb{Z}^m$ fixée

‖ une fois pour toute.

preuve : Par récurrence sur m.
Il suffit de considérer le cas où $m=1$, puisque si (F) est vraie au rang m et si :

$$F(z) = \sum_{(\alpha,p)\in\mathcal{R}\times\mathbb{N}^{m+1}} g_{\alpha,p}(z)\, z_1^{\alpha_1}\cdots z_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ln^{p_1} z_1 \cdots \ln^{p_{m+1}} z_{m+1}$$

on fixe $z_1,\dots,z_m$ et l'on applique la propriété d'unicité au rang 1 pour obtenir que les sommes

$$\sum_{\substack{(\alpha,p)\in\mathcal{R}\times\mathbb{N}^{m+1}\\ \alpha_{m+1}=\xi \text{ et } p_{m+1}=j}} g_{\alpha,p}(z)\, z_1^{\alpha_1}\cdots z_m^{\alpha_m} \ln^{p_1} z_1 \cdots \ln^{p_m} z_m$$

sont uniques. On applique alors l'hypothèse de récurrence.

<u>Cas où $m=1$</u> :
La somme $E = \sum_{(\alpha,p)\in\mathcal{R}\times\mathbb{N}} E_{\alpha,p}$ des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$E_{\alpha,p} = \{ g(z) z^{\alpha} \ln^p z \ / \ g\in\mathcal{O}(D^*)\}$, où $\mathcal{R}$ est une famille fixée de représentants de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, est une somme directe.

Posons $E_\alpha = \sum_{p\in\mathbb{N}} E_{\alpha,p}$ (où $\alpha\in\mathcal{R}$).

Chaque E_α est inclus dans le sous-espace vectoriel F_λ des vecteurs propres généralisés de la transformation de monodromie T dans E correspondant à la valeur propre $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$.

$$F_\lambda = \{ v\in E \ / \ \exists r\in\mathbb{N} \quad (T-\lambda\, Id)^r(v) = 0 \}$$

Vérifions que $E_\alpha \subset F_\lambda$. Pour cela, montrons que :

$$(T-\lambda\, Id)^{p+1}\left(g(z) z^{\alpha} \ln^p z\right) = 0 \qquad (*)$$

pour tout $g\in\mathcal{O}(D^*)$, par récurrence sur p.

Prenons l'hypothèse de récurrence :

H(p) : « $0 \leq k \leq p \Rightarrow (T-\lambda Id)^{p+1}(g(z)z^{\alpha}\ln^{k}z) = 0$
pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $g \in \mathcal{O}(D^{*})$ »

H(o) est vrai car :

$$(T-\lambda Id)(g(z)z^{\alpha}\ln^{k}z) = \lambda g(z)z^{\alpha}[(\ln z + i2\pi)^{k} - \ln^{k}z]$$

Si H(p-1) est vraie, on a :

$$(T-\lambda Id)^{p+1}(g(z)z^{\alpha}\ln^{k}z) = (T-\lambda Id)^{p}(\lambda g(z)z^{\alpha}[(\ln z+i2\pi)^{k} - \ln^{k}z])$$
$$= 0 \quad \text{d'après l'hypothèse } H(p-1).$$

Ainsi $E = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} E_{\alpha} \subset \sum_{\lambda} F_{\lambda} \subset E$ donc $E = \sum_{\lambda} F_{\lambda}$

et l'inclusion $E_{\alpha} \subset F_{\lambda}$ ne peut pas être stricte. Donc $E_{\alpha} = F_{\lambda}$ et la somme $E = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} E_{\alpha}$ est directe.

Il suffit maintenant de montrer que la somme $E_{\alpha} = \sum_{p \in \mathbb{N}} E_{\alpha,p}$ est directe pour conclure.

Si $\sum_{p=0}^{k} g_p(z) z^{\alpha} \ln^{p} z = 0$, le lemme 2.2.3 donne :

$$(T-\lambda Id)^{k}\left(\sum_{p=0}^{k} g_p(z)z^{\alpha}\ln^{p}z\right) = k!\,\lambda^{k}(i2\pi)^{k} g_k(z)\, z^{\alpha} = 0$$

d'où $g_k(z) = 0$ et même $g_p(z) = 0$ pour $0 \leq p \leq k$ en réitérant le même raisonnement.

CQFD

NB : l'unicité 2.2.2 montre que si F est une fonction à croissance modérée sur $D^{*} \setminus p^{-1}(0)$ qui admet le développement (E) du théorème 2.2.1, alors toutes les fonctions $g_{\alpha,p}$ sont méromorphes sur X.

2.2.3 lemme

Avec les notations de 2.2.2, on a :

$$\begin{cases} (T-\lambda Id)^k z^\alpha \ln^p z = 0 & \text{si } k>p \\ (T-\lambda Id)^k z^\alpha \ln^k z = k!\,\lambda^k (i2\pi)^k z^\alpha \end{cases}$$

preuve :

La première égalité provient de (*) de la preuve 2.2.2.
La seconde se montre par récurrence sur k. Elle est triviale pour $k=0$. Supposons la vraie au rang k, alors :

$$\begin{aligned}(T-\lambda Id)^{k+1} z^\alpha \ln^{k+1} z &= (T-\lambda Id)^k [\lambda z^\alpha ((\ln z + i2\pi)^{k+1} - \ln^{k+1} z)] \\ &= \lambda (T-\lambda Id)^k \left(\sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^i (i2\pi)^{k+1-i} z^\alpha \ln^i z\right) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^i (i2\pi)^{k+1-i} (T-\lambda Id)^k (z^\alpha \ln^i z) \\ &= \lambda\, C_{k+1}^k (i2\pi)(T-\lambda Id)^k (z^\alpha \ln^k z) \\ &= \lambda (i2\pi)(k+1).\, k!\,\lambda^k (i2\pi)^k z^\alpha \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

CQFD

2.3 Critère de croissance modérée.

2.3.1 Proposition :

Soient X (resp. X') une variété analytique complexe connexe et Y (resp. Y') un sous-ensemble analytique propre de X (resp. X'). Soient F une fonction analytique multiforme sur $X^* = X \setminus Y$ et $\lambda : X' \to X$ une application analytique telle que $\lambda(Y') \subset Y$ et $\lambda(X'^*) \subset X^*$, où $X'^* = X' \setminus Y'$.

Alors :

(1) $F \circ \lambda$ est une fonction analytique multiforme sur X'^*,

(2) F de détermination finie $\Rightarrow$ $F\circ\lambda$ de détermination finie,

(3) F à croissance modérée le long de Y $\Rightarrow$ $F\circ\lambda$ à croissance modérée le long de Y'.

preuve :

On peut supposer que Y et Y' sont des hypersurfaces analytiques, ce qui ne change rien aux démonstrations et simplifie certaines notations.

$*(1)$: Il faut définir $F \circ \lambda$: Soit $z_0 \in X'^*$ tel que $\lambda(z_0) = \zeta_0 \in X^*$. Soit f_0 une branche de F en ζ_0. Alors $f_0 \in \mathcal{O}_{\zeta_0}$ où $\mathcal{O}_{\zeta_0}$ désigne l'espace des germes de fonctions analytiques en ζ_0 et $f_0 \circ \lambda \in \mathcal{O}_{z_0}$ détermine une fonction analytique multiforme sur X'^*, ie se prolonge analytiquement le long de tous les chemins de X'^* d'origine z_0.

Pour le voir, on retourne à la définition du prolongement analytique le long d'un chemin : soit γ un chemin de X'^* d'origine z_0 et γ^* le chemin $\gamma^* = \lambda \circ \gamma$ de X^*.
f_0 se prolonge analytiquement le long de γ^*, donc il existe une famille $\{\varphi_t \in \mathcal{O}_{\gamma^*(t)} \,/\, 0 \leq t \leq 1\}$ de germes telle que :

$$\begin{cases} \varphi_0 = f_0 \\ \text{et} \\ \forall \tau \in [0,1] \quad \exists\, T \text{ voisinage de } \tau \text{ inclus dans } [0,1] \quad \exists\, U \Subset X^* \\ \qquad \exists f \in \mathcal{O}(U) \quad \gamma^*(T) \subset U \text{ et } \forall t \in T \quad \rho_{\gamma^*(t)}(f) = \varphi_t \end{cases}$$

(où $\rho_\alpha(f)$ désigne le germe induit par $f \in \mathcal{O}(U)$ en $\alpha \in U$)

Notons $\psi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ le germe en $\gamma(t)$ de la fonction définie par $\psi_t(z) = \varphi_t(\lambda(z))$ pour z voisin de $\gamma(t)$. (Abus : on représente indifféremment par ψ_t (resp. φ_t) les germes ou les fonctions analytiques sur un voisinage de $\gamma(t)$ (resp. $\gamma^*(t)$))

On a $\psi_0 = f_0 \circ \lambda$ et si $\tau \in [0,1]$, $\lambda^{-1}(U)$ est un ouvert de D^*. $\gamma^*(T) \subset U \Rightarrow \gamma(T) \subset \lambda^{-1}(U)$ et les fonctions analytiques $f \in \mathcal{O}(U)$ permettent de définir $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\lambda^{-1}(U))$ en posant simplement :

$$\tilde{f}(z) = f \circ \lambda\,(z) \qquad \text{pour tout } z \in \lambda^{-1}(U)$$

Pour $t \in T$ et z voisin de $\gamma(t)$, on a bien $\rho_{\gamma(t)}(\tilde{f}) = \psi_t$ puisque :

$$\rho_{\gamma(t)}(\tilde{f}(z)) = \rho_{\gamma(t)}(f \circ \lambda\,(z))$$

$$\text{et } f \circ \lambda\,(z) = \varphi_t(\lambda(z)) = \psi_t(z) \quad \text{pour } z \text{ voisin de } \gamma(t)$$

Remarque :

La fonction multiforme $F\circ\lambda$ dépend du choix de la branche f_0 de F en ζ_0, comme on peut le voir en prenant $F(z) = \ln z$ et $\lambda(z) = e^z$.

Cependant $F\circ\lambda$ ne dépend pas du choix de f_0 lorsque

$$\lambda^*(\pi^1(X'^*)) = \pi^1(X^*)$$

où $\lambda^*(\{\gamma\}) \doteq \{\lambda\circ\gamma\}$ pour toute classe $\{\gamma\}$ du groupe fondamental $\pi^1(X'^*)$ de X'^*.

* (2) : Le résultat provient du fait que toutes les branches h de $F\circ\lambda$ en un point z s'écrivent sous la forme $h = \varphi\circ\lambda$ où φ est une branche de F en $\zeta = \lambda(z)$.

En effet, il existe un chemin γ de z_0 à z tel que $h = (f_0\circ\lambda)_\gamma$ ($\doteq$ germe obtenu en z par prolongement de $f_0\circ\lambda$ le long de γ) et d'après le * (1) :

$$h = (f_0\circ\lambda)_\gamma = \varphi_1$$

$$\text{où } \varphi_1(z) = \varphi_1(\lambda(z)) = (f_0)_{\gamma^*}(\lambda(z)) \qquad \text{pour } z \text{ voisin de } \gamma(t).$$

Ainsi $h = (f_0)_{\gamma^*}\circ\lambda$ où $(f_0)_{\gamma^*}$ représente bien une branche de F en ζ.

Cela étant, si F est de détermination finie et si $z \in D^*$, notons $(\varphi_1, \dots, \varphi_\ell)$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H_F(\zeta)$ engendré par les déterminations de F en $\lambda(z) = \zeta$.

Toute branche h de $F\circ\lambda$ en z s'écrit $h = \varphi\circ\lambda$ où φ s'écrit :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\ell} c_i\, \varphi_i \qquad (c_i \in \mathbb{C})$$

donc :

$$h = \sum_{i=1}^{\ell} c_i\, (\varphi_i\circ\lambda)$$

et $\{\varphi_1\circ\lambda, \dots, \varphi_\ell\circ\lambda\}$ constitue un système générateur du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H_{F\circ\lambda}(z)$ engendré par les déterminations de $F\circ\lambda$ en z.

*(3) : $F\circ\lambda$ à croissance modérée le long de Y' ?

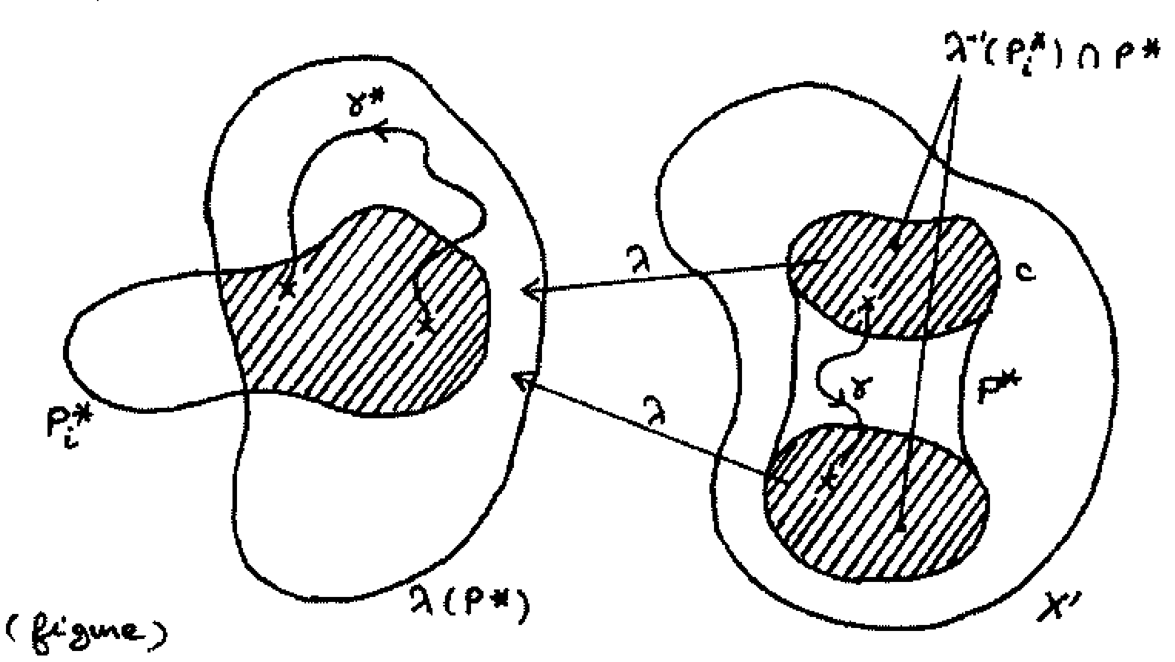
Soit P une partie semi-analytique compacte de X' telle que $P^* = P\setminus Y'$ soit simplement connexe.
On peut recouvrir le compact $\lambda(P)$ par un nombre fini $\{P_i\}_{1\leq i\leq k}$ de parties P_ν d'une triangulation semi-analytique $\{P_\nu\}_\nu$ de la paire (X,Y).
Comme $\lambda(P^*) = \lambda(P)^*$ où $\lambda(P)^* = \lambda(P)\setminus Y$, on a l'inclusion :

$$\lambda(P^*) \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i^*$$

Soit h une détermination quelconque de $F\circ\lambda$ sur P^*. Si $\lambda^{-1}(P_i^*)\cap P^* \neq \emptyset$, $1\leq i\leq k$, h induit une détermination de $F\circ\lambda$ sur $\lambda^{-1}(P_i^*)\cap P^*$ qui va s'écrire sous la forme :

$$h = f_i\circ\lambda \qquad \text{où } f_i \text{ est une détermination de } F \text{ sur } P_i^*.$$

(En effet, d'après *(1) et *(2) on a clairement $h = f_i\circ\lambda$ sur une composante simplement connexe c de $\lambda^{-1}(P_i^*)\cap P^*$, f_i comme ci-dessus, mais il peut y avoir une infinité de telles composantes. Ce n'est pas grave puisque le prolongement de h le long de tous les chemins γ de $\lambda^{-1}(P_i^*)\cap P^* \subset P^*$ donne $(h)_\gamma = (f_i)_{\gamma^*}\circ\lambda$ où $\gamma^* = \lambda\circ\gamma$ est un chemin de $\lambda(P^*)$ qui est simplement connexe donc $(f_i)_{\gamma^*} = f_i$ en tout point, avec l'abus d'écriture usuel confondant germe en un point et fonction en ce point. cf figure ci-dessous)



(figure)

Si $z_0 \in Y'$, $\lambda(z_0) \in Y$ et il existe un voisinage ouvert U de $\lambda(z_0)$ dans X tel que $Y \cap U = \{\zeta \in U \,/\, g(\zeta) = 0\}$ où $g \in \mathcal{O}(U)$ et $|g(\zeta)| \leq 1$ pour tout $\zeta \in U$.

$g \circ \lambda$ est une équation analytique de Y' dans $U' \doteq \lambda^{-1}(U)$ et $z_0 \in U'$. On a pour tout $1 \leq i \leq k$:

$$\exists c_i > 0 \quad \exists w_i \in \mathbb{N} \quad \forall \zeta \in P_i^* \cap U \quad |f_i(\zeta)| \leq \frac{c_i}{|g(\zeta)|^{w_i}}$$

donc : $$\forall z \in \varphi^{-1}(P_i^*) \cap U' \quad |f_i(\lambda(z))| \leq \frac{c}{|g(\lambda(z))|^{w}}$$

en posant $c = \operatorname{Sup} c_i$ et $w = \operatorname{Sup} w_i$ pour $1 \leq i \leq k$.
Finalement on obtient bien :

$$\forall z \in P^* \cap U' \quad \exists i \quad z \in \varphi^{-1}(P_i^*) \quad \text{et} \quad |h(z)| \leq \frac{c}{|g \circ \lambda(z)|^{w}}$$

ce qui prouve la croissance modérée de $F \circ \lambda$.
CQFD

2.3.2 <u>Proposition (Critère de croissance modérée)</u>

Soit F une fonction analytique multiforme de détermination finie sur $X^* = X \setminus Y$ où Y désigne un sous-ensemble analytique de la variété analytique complexe connexe X.
Alors F est à croissance modérée le long de Y si et seulement si pour toute application analytique $\lambda : D \longrightarrow X$ telle que $\lambda(0) \in Y$ et $\lambda(D^*) \subset X^*$, $F \circ \lambda$ est une fonction analytique multiforme à croissance modérée près de l'origine dans D^*.

preuve : La condition est nécessaire d'après la proposition 2.3.1.
Montrons qu'elle est suffisante.
On peut supposer que :

1) Y est une hypersurface analytique de X,
2) Y est un diviseur à croisements normaux de X,
3) $X = D^n$, $X^* = D^n \setminus p^{-1}(0)$ où $D^n = \{z \in \mathbb{C}^n \,/\, |z| < 1\}$ et $p(z) = z_1 \cdots z_m$.

En effet :

1) est vrai car tout ensemble analytique Y de X est inclus, localement, dans une hypersurface analytique et puisque la notion de croissance modérée est une propriété locale.
Supposons que $F \in HO(X \setminus Y)$ et notons H une hypersurface analytique contenant Y dans un ouvert U de X. On a, localement dans U :

$$\left\{ F \text{ à croiss. mod. le long de } Y \right\} \underset{(2.3.1)}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda : D \to X \,/\, \lambda(0) \in Y \text{ et } \lambda(D^*) \subset X \setminus Y \\ F \circ \lambda \text{ à croiss. mod. le long de } 0 \end{array} \right\}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow (*)$$

$$\left\{ F \text{ à croiss. mod. le long de } H \right\} \underset{(2.3.2)}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda : D \to X \,/\, \lambda(0) \in H \text{ et } \lambda(D^*) \subset X \setminus H \\ F \circ \lambda \text{ à croiss. mod. le long de } 0 \end{array} \right\}$$

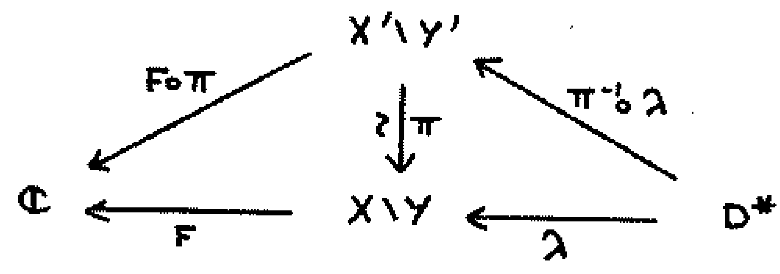
(pour une hypersurface H)

$(*)$ est facile : Si $\lambda : D \to X$ vérifie $\lambda(0) \in H$ et $\lambda(D^*) \subset X \setminus H$, on a nécessairement $\lambda(D^*) \subset X \setminus Y$. De 2 choses l'une :

α) Si $\lambda(0) \in Y$, alors $F \circ \lambda$ est à croissance modérée le long de 0 par hypothèse,

β) Si $\lambda(0) \in H \setminus Y$, alors F est parfaitement définie sur un voisinage de $\lambda(0)$ car $F \in HO(X \setminus Y)$, donc à fortiori F est à croissance modérée le long de 0.

2) est possible car le Théorème de désingularisation de Hironaka montre l'existence d'un morphisme analytique propre $\pi : X' \to X$ et d'un diviseur à croisements normaux Y' de la variété lisse X' tel que $\pi : X' \setminus Y' \to X \setminus Y$ soit un isomorphisme analytique.
D'où le diagramme :



où $Y' = \pi^{-1}(Y)$.
Ainsi, si $F \circ \lambda$ est à croissance modérée le long de 0 pour toute application analytique $\lambda : D \to X$ telle que $\lambda(0) \in Y$ et $\lambda(D^*) \subset X \setminus Y$, $(F \circ \pi) \circ (\pi^{-1} \circ \lambda) = F \circ \lambda$ aussi.
Quand λ varie, $\pi^{-1} \circ \lambda$ décrit l'ensemble des applications

analytiques de D vers X' vérifiant les 2 conditions de l'énoncé. Ainsi, le problème résolu pour (X', Y') donne immédiatement que $F\circ\pi$ est à croissance modérée, ce qui équivaut à dire que F est à croissance modérée d'après la proposition 2.1.4.

3) est vrai puisque nous nous intéressons seulement à la croissance modérée de F qui est une propriété locale.

Dans ces hypothèses de travail, toute fonction analytique multiforme F de détermination finie sur X^* s'écrira :

$$F(z) = \sum_{(\alpha,p)\in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^m} g_{\alpha,p}(z)\, z_1^{\alpha_1}\cdots z_m^{\alpha_m} \ln^{p_1} z_1 \cdots \ln^{p_m} z_m \qquad (1)$$

où $g_{\alpha,p}\in\mathcal{O}(X^*)$ et où la somme est finie (cf. 2.2.2)

Posons $z=(z_1,\dots,z_n)=(z_1,z')$ où $z'=(z_2,\dots,z_n)\in D^{n-1}\setminus p_1^{-1}(0)$ et $p_1(z')=z_2\cdots z_m$

Pour chaque $a'\in D^{n-1}\setminus p_1^{-1}(0)$, on définit l'application analytique :

$$\lambda_{a'} : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & (t,a') \end{array}$$

qui vérifie $\lambda_{a'}(0)\in Y$ et $\lambda_{a'}(D^*)\subset X^*$

Pour chaque valeur ξ et j fixées de α_1 et p_1 dans (1), la fonction

$$\varphi_{\xi,j}(t,a') = \sum_{\substack{(\alpha,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^m\\ \alpha_1=\xi\,;\,p_1=j}} g_{\alpha,p}(t,a')\, a_2^{\alpha_2}\cdots a_m^{\alpha_m}\ln^{p_2}a_2\cdots\ln^{p_m}a_m$$

est méromorphe en t sur D^*, a' étant fixé, puisque $F\circ\lambda_{a'}$ est à croissance modérée par hypothèse (cf. Th 2.2.1)

Posons $g_{\alpha,p}(t,a') \doteq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dfrac{b^i_{\alpha,p}(a')}{t^i}$.

La fonction :

$$\varphi_{\xi,j}(t,a') = \sum_{\substack{\alpha_1=\xi\,;\,p_1=j\\ i\in\mathbb{Z}}} \frac{b^i_{\alpha,p}(a')\, a_2^{\alpha_2}\cdots a_m^{\alpha_m}\ln^{p_2}a_2\cdots\ln^{p_m}a_m}{t^i}$$

est méromorphe en t, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\varphi^i_{\xi,j} \doteq \sum_{\alpha_1=\xi;\ p_1=j} b^i_{\alpha,p}(a')\, a_2^{\alpha_2} \cdots a_m^{\alpha_m} \ln^{p_2} a_2 \cdots \ln^{p_m} a_m = 0 \qquad (2)$$

dès que $i > k$, ceci pour tout $a' \in D^{n-1} \setminus p_1^{-1}(0)$.

En effet, si nous supposons le contraire l'ensemble

$$\{ z' \in D^{n-1} \setminus p_1^{-1}(0) \ / \ \exists k \quad \varphi^i_{\xi,j}(z') = 0 \ \text{ si } \ i > k \}$$

est de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. C'est absurde car pour chaque a' fixé dans $D^{n-1} \setminus p_1^{-1}(0)$, $\varphi_{\xi,j}(t, a')$ est une fonction méro_morphe de t.

Comme les indices $p_2, \ldots, p_m$ de la sommation (2) sont distincts 2 à 2 et comme les complexes $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ne sont pas congrus modulo $\mathbb{Z}^{m-1}$, l'unicité du développement (1) (cf. 2.2.2) donne :

$$\forall i > k \qquad \forall a' \in D^{n-1} \setminus p_1^{-1}(0) \qquad b^i_{\alpha,p}(a') = 0$$

Ainsi $z_1 = 0$ est une singularité polaire de $g_{\alpha,p}(z_1, z')$ consi_dérée comme fonction de (z_1, z'), ie :

$$z_1^k\, g_{\alpha,p}(z_1, z') = h_{\alpha,p}(z_1, z') \quad \text{où } h_{\alpha,p} \text{ est holomorphe}$$

sur $D^{n-2} \setminus p_2^{-1}(0)$ où $p_2(z) = z_2 \cdots z_m$ et $D^{n-2} = \{ (z_3, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-2} / |z_i| < 1 \}$

Quitte à retrancher k de α_1, on peut toujours supposer que les fonctions $g_{\alpha,p}$ sont holomorphes sur la composante $\{z_1 = 0\}$ du diviseur Y.

On recommence de la même manière avec la composante $\{z_2 = 0\}$ et ainsi de suite pour obtenir que l'on peut choisir $g_{\alpha,p}(z)$ holomorphe sur tout D^n dans l'expression (1).

CQFD

Chapitre 3 — Démonstration du Théorème de Régularité.

3.1 Cas propre I

Théorème :

Soient $\pi : X \longrightarrow T$ une application analytique propre entre deux variétés analytiques complexes connexes, Y une hypersurface analytique de X et Σ le sous-ensemble analytique de T obtenu au lemme 1.3.1.
Notons $X^* = X \setminus Y$, $T^* = T \setminus \Sigma$, $q : \tilde{X}^* \longrightarrow X^*$ le revêtement universel de X^* et $(\tilde{X}^*)_{T^*} = \tilde{X}^* \cap (\pi \circ q)^{-1}(T^*)$.
Soient ω une p-forme différentielle multiforme relative et fermée sur X^* (ie la donnée de $\tilde{\omega} \in \Omega^p(\tilde{X}^*/T)$ relative et fermée, cf 1.3.3) et $\tilde{h}$ une section locale du faisceau d'homologie $H_p((\tilde{X}^*)_{T^*}/T^*)$
Alors si ω est de classe de Nilsson (cf 2.1.10) sur X^*, l'intégrale $f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega}$ définit une fonction de classe de Nilsson sur T^*.

preuve : Seule la croissance modérée de f reste à montrer (Proposition 1.3.4)

1) Première étape : Réduction au cas où $T = D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, $\Sigma = \{0\}$, Y est un diviseur à croisements normaux et où $\pi^{-1}(0) \subset Y$.

La donnée de $\omega \in \Omega^p_{MO}(X^*/T)$ revient à la donnée d'une p-forme différentielle $\tilde{\omega} \in \Omega^p(\tilde{X}^*/T)$ relative et fermée sur $\tilde{X}^*$.

$\tilde{h}$ est une section locale du faisceau $H_p((\tilde{X}^*)_{T^*} / T^*)$, ie une section globale multiforme de ce faisceau (avec la terminologie de la remarque 1.3.5). On notera encore $\tilde{h}(t)$ au lieu de $\tilde{h}(\tilde{t})$ cette section globale.
Soit $h(t) = q_* \tilde{h}(t)$. $h(t)$ est une classe d'homologie de la fibre X^*_t dépendant continûment de t, et l'on peut écrire :

$$f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{h}(t)} q^*\omega = \int_{h(t)} \omega \qquad \begin{cases} \omega \in \Omega^p_{H_0}(X^*/T) \\ h(t) \in H_p(X^*_t) \end{cases}$$

puisque $\tilde{\omega} = q^*\omega$ localement.
On a donné un sens à l'intégrale $\int_{h(t)} \omega$ en recouvrant le compact $h(t)$ par un nombre fini d'ouverts simplement connexes sur lesquels ω admet des déterminations holomorphes.

La proposition 2.3.2 montre que f est à croissance modérée le long de Σ si et seulement si pour toute application analytique $\lambda : D \longrightarrow T$ telle que $\lambda(0) \in \Sigma$ et $\lambda(D^*) \subset T^*$ où $D^* = D \setminus \{0\}$, $f \circ \lambda$ est une fonction analytique multiforme à croissance modérée le long de 0.

Tout revient donc à montrer que l'on peut transporter la situation au dessus de T en une situation analogue au dessus de D.
Observons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & & X'' \supset Y'' \\
 & \overset{\beta'}{\swarrow} & \downarrow \beta \text{ propre} \\
Y \subset X & \overset{pr_1}{\longleftarrow} & X' = X \times_T D \supset Y' \\
\pi \downarrow & & \downarrow pr_2 \\
\Sigma \subset T & \overset{\lambda}{\longleftarrow} & D
\end{array}$$

$Y' = pr_1^{-1}(Y) \cup pr_2^{-1}(0)$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des points critiques de $\pi : X \longrightarrow T$.

Le produit fibré $X' = X \times_T D \doteq \{(x,y) \in X \times D \ / \ \pi(x) = \lambda(y)\}$

est un sous-ensemble analytique de la variété produit $X \times D$ dont toutes les singularités sont dans $pr_1^{-1}(\mathcal{S})$ (puisque la différentielle $\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}(x), -\frac{\partial \lambda}{\partial y}(y)\right)$ de

$(x,y) \longmapsto \pi(x) - \lambda(y)$ est surjective dès que $x \notin \mathcal{S}$) donc dans la fibre $pr_2^{-1}(0)$ (puisque $pr_1^{-1}(\mathcal{S}) \subset pr_2^{-1}(0)$. En effet, si $(x,y) \in pr_1^{-1}(\mathcal{S})$ et comme $\pi(\mathcal{S}) \subset \Sigma$ par construction, on a $\pi(x) = \lambda(y) \in \Sigma$ d'où $y = 0$)

Posons $Y' = pr_1^{-1}(Y) \cup pr_2^{-1}(0)$

Comme toutes les singularités de X' sont dans Y', on peut appliquer le théorème de désingularisation 0.4 et obtenir une variété analytique complexe X'', un diviseur à croisements normaux $Y'' = \beta^{-1}(Y')$ de X'' et un morphisme analytique propre $\beta : X'' \longrightarrow X'$ qui induit un isomorphisme analytique entre $X''^* \doteq X'' \setminus Y''$ et $X'^* \doteq X' \setminus Y'$.

Fixons $y \in D^*$.
$h(\lambda(y))$ représente une classe d'homologie de $X^*_{\lambda(y)} \setminus \pi^{-1}(\Sigma) = X^*_{\lambda(y)}$.
$pr_1 : X'_y \longrightarrow X_{\lambda(y)}$ est un isomorphisme et l'on a clairement $X_{\lambda(y)} \setminus Y = pr_1(X'_y \setminus Y')$ de sorte que

$$pr_1 : X'^*_y \longrightarrow X^*_{\lambda(y)}$$

soit un isomorphisme.
De même $\beta : X''^* \longrightarrow X'^*$ est un isomorphisme qui induit un isomorphisme $\beta : X''^*_y \longrightarrow X'^*$ entre les fibres.
Finalement l'application :

$$\beta' : pr_1 \circ \beta \ : \ X''^*_y \longrightarrow X^*_{\lambda(y)}$$

est un isomorphisme.

Ainsi $h(\lambda(y))$ est une classe d'homologie de $X^*_{\lambda(y)}$ qui détermine naturellement un cycle $h'(y) = (\beta'^{-1})_*(h(\lambda(y)))$ de X''^*_y.

Notons $\omega' = \beta'^*\omega$ le pull-back de la forme différentielle multi_-forme relative et fermée ω sur X^* par $\beta' : X''^* \longrightarrow X^*$ (On a bien $\beta'(X''^*) \subset X^*$ car $(x,y) \notin Y' \Rightarrow x \notin Y$)
$\omega' \in \Omega^p_{Mo}(X''^*/D)$ est fermée de détermination finie et à croissance modérée le long de Y'' d'après la Prop. 2.3.1, compte tenu de $\beta'(Y'') \subset Y \cup \pi^{-1}(\Sigma)$ et du fait que ω est à croissance modérée le long de Y et multiforme sur tout X^*.

Pour tout $y \in D^*$:

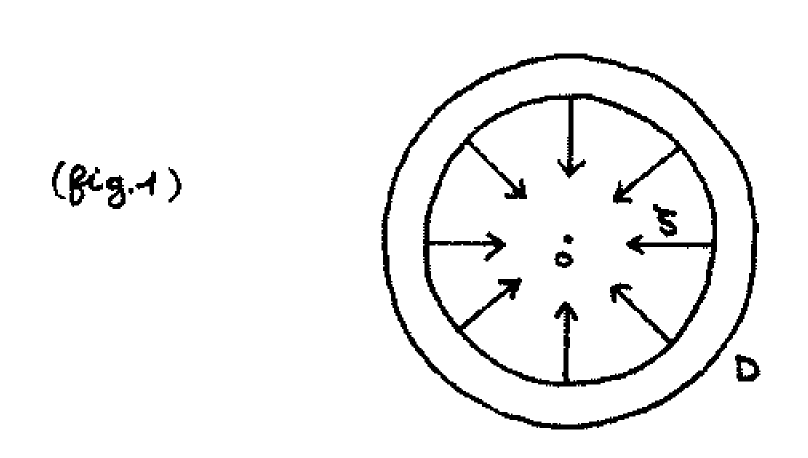
$$f(\lambda(y)) = \int_{h(\lambda(y))} \omega = \int_{\beta'_*(h'(y))} \omega = \int_{h'(y)} \beta'^*\omega = \int_{h'(y)} \omega'$$

Enfin, si K est un compact de D, $pr_2^{-1}(K) = \pi^{-1}(\lambda(K)) \times K \cap X'$ est l'intersection d'un compact et du fermé X' de $X \times D$, donc pr_2 est propre, ce qui achève la démonstration de la 1-étape.

2) <u>Seconde étape</u> : On construit un champ de vecteurs ξ sur X de classe C^∞, tangent à Y, compatible avec la projection $\pi : X \longrightarrow D$ et qui se projette sur le champ de vecteurs :

$$\zeta = -\left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\tau} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}\right) = -r \frac{\partial}{\partial r}$$

(fig.1)



Comme $\pi^{-1}(0) \subset Y$, $\pi : X \longrightarrow D$ analytique et Y diviseur à croisements normaux, il existe en tout point de Y une carte (U,φ), $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$, telle que :

$$\begin{cases} U \cap Y = \{ z \in U \,/\, z_1 \cdots z_p = 0 \} \\ \pi(z) = z_1^{a_1} \cdots z_m^{a_m} \quad \text{où } m \leq p \leq n \text{ et } a_i \in \mathbb{N} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a_1 \neq 0) \end{cases}$$

Cela provient du Théorème des zéros de Hilbert, à savoir $\mathcal{I}(V(\mathcal{I})) = \sqrt{\mathcal{I}}$ avec des notations classiques. On a, en effet : $\pi^{-1}(0) \subset Y \Rightarrow \mathcal{I}(\pi^{-1}(0)) \supset \mathcal{I}(Y) \Leftrightarrow \sqrt{(\pi)} \supset \sqrt{(z_1 \cdots z_p)} = (z_1 \cdots z_p)$ donc il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $(z_1 \cdots z_p)^\ell = a(z)\, \pi(z)$.
Comme l'anneau des germes de fonctions analytiques est factoriel, on aura $\pi(z) = z_1^{a_1} \cdots z_m^{a_m}$ où $m \leq p$ et $a_i \in \mathbb{N}$.

Définissons le champ de vecteurs sur U :

$$\xi_U = -\frac{1}{a_1}\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right)$$

C'est un champ lisse sur U ; tangent à Y et qui vérifie :

$$\pi_* \xi_U = \Sigma$$

En effet, $\pi_* \xi_U = -\frac{1}{a_1}\left(z_1\, \pi_* \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1\, \pi_* \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right)$ et l'on a les formules :

$$\begin{cases} \pi_* \dfrac{\partial}{\partial z_i} = \dfrac{\partial g}{\partial z_i}(\varphi(z)) \dfrac{\partial}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial z_i}(\varphi(z)) \dfrac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \\[2ex] \pi_* \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}_i}(\varphi(z)) \dfrac{\partial}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}_i}(\varphi(z)) \dfrac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \end{cases}$$

où $g = \pi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow D$

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto z_1^{a_1} \cdots z_m^{a_m}$$

Notons que la construction du champ ξ_U est triviale au voisinage de tout point de $X \setminus Y$ puisque $\pi : X \setminus \pi^{-1}(0) \longrightarrow D^*$ est une submersion (prendre $\pi(z) = z_1$ et $\xi_U = -\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right)$).

On recolle les champs de vecteurs précédents grâce à une partition différentiable de l'unité $\{h_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ de X associée au recouvrement d'ouverts $\{U\}_{U\in\mathcal{U}}$ où chaque U représente un domaine d'une carte du type précédent.
On obtient :

$$\Xi = \sum_{U\in\mathcal{U}} h_U \Xi_U$$

Ξ est un champ de vecteurs C^∞ sur X, tangent à Y, compatible avec π et $\pi_* \Xi = \Sigma$ puisque :

$$\forall \zeta \in X \qquad \pi_*(\Xi(\zeta)) = \sum_{U\in\mathcal{U}} h_U(\zeta)\, \pi_*(\Xi_U(\zeta))$$
$$= \sum_{U\in\mathcal{U}} h_U(\zeta)\, \Sigma(\pi(\zeta)) = \Sigma(\pi(\zeta))$$

<u>On peut supposer que Ξ est à support compact</u> :
Soient $0<r<r'<1$ et B (resp. B') le disque fermé de centre 0 et de rayon r (resp. r') dans D. Il existe une fonction lisse $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\Psi|_{\pi^{-1}(B)} \equiv 1$ et $\Psi|_{X\setminus\pi^{-1}(B')} \equiv 0$ de sorte que le champ de vecteurs $\Psi.\Xi$ soit lisse à support compact, tangent à Y et vérifie encore $\pi_*\Xi = \Sigma$ sur $\pi^{-1}(B)$.
Comme seule la situation au voisinage de 0 dans D nous intéresse, on travaillera dans B dans toute la suite de la démonstration.
Pour ne pas introduire de notations inutiles, on écrira Ξ au lieu de $\Psi.\Xi$ et D au lieu de B.

Les trajectoires intégrales du champ Σ sont :

$$\alpha_t(\tau_0) = \tau_0\, e^{-t} \qquad \tau_0 \in D \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

et l'intégration du champ Ξ à support compact donne un groupe de difféomorphismes à un paramètre $\{j_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ qui induit un difféomorphisme :

$$j_t : \quad X_{\tau_0} \longrightarrow X_{\alpha_t(\tau_0)} \qquad (1)$$

entre les variétés compactes X_{τ_0} et $X_{\alpha_t(\tau_0)}$, pour $t \in \mathbb{R}_+$.
En d'autres termes, j_t est situé au dessus des trajectoires intégrales de Σ comme nous le vérifions dans le calcul suivant :

Notons indifféremment $j_t(z) = j(z,t) = j_z(t)$ et $\alpha_t(\tau) = \alpha(\tau,t) = \alpha_\tau(t)$.
Pour $z \in X_{\tau_0}$ et $t > 0$, on a :

$$\begin{cases} \pi_*(\Xi(j_z(t))) = \Sigma(\pi \circ j_z(t)) \\ \pi_*(j'_z(t)) = \pi_* \circ j_{z*}\left(\frac{d}{dt}\right) = (\pi \circ j_z)_*\left(\frac{d}{dt}\right) \doteq (\pi \circ j_z)'(t) \end{cases}$$

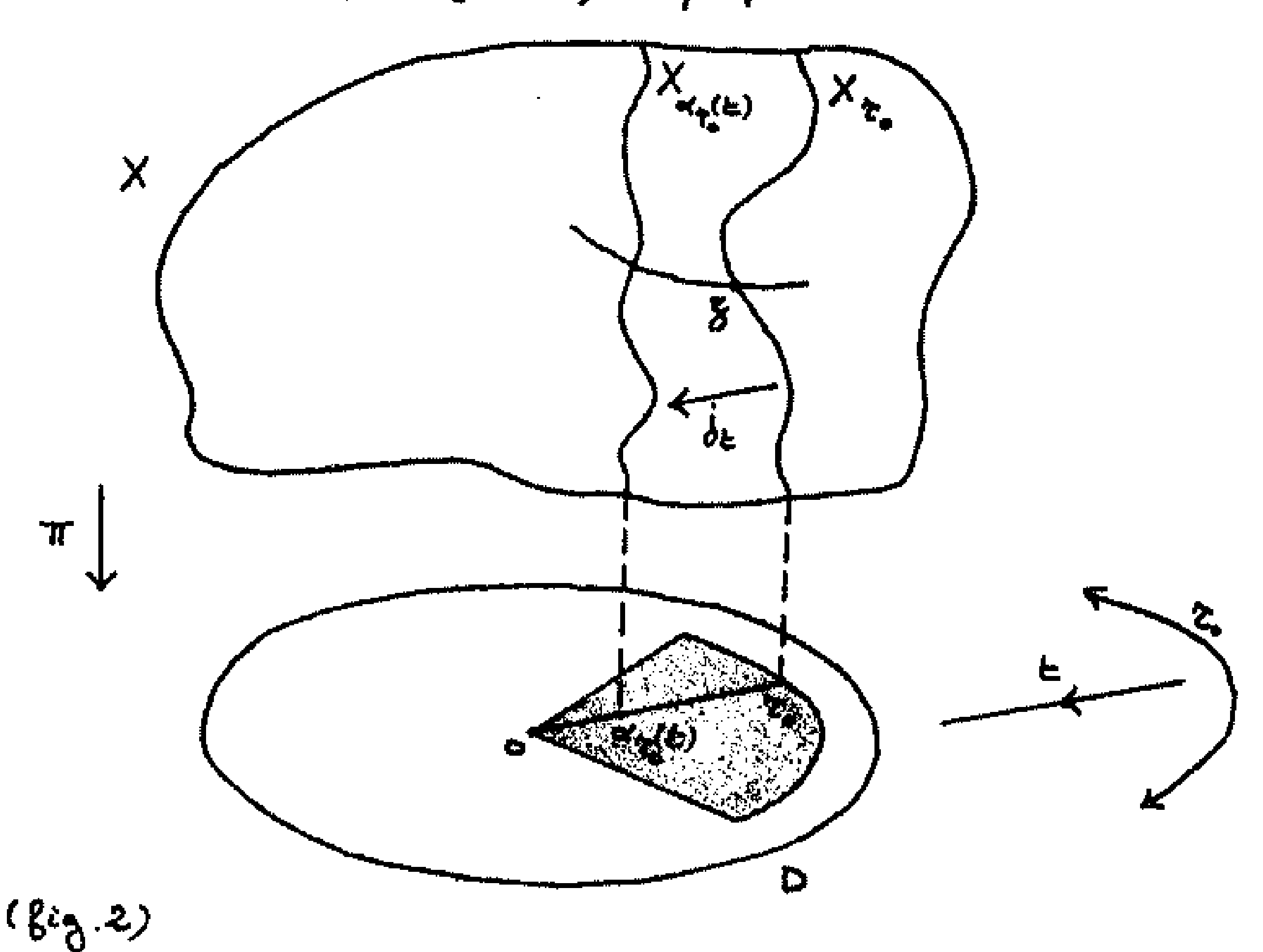
Ainsi l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow D \\ t &\longmapsto \pi \circ j_z(t) \end{aligned}$$

est une courbe intégrale de Σ qui admet la condition initiale $\pi \circ j_z(0) = \pi(z) = \tau_0$. L'unicité des courbes intégrales vérifiant la même condition initiale prouve que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \pi \circ j_z(t) = \alpha(\tau_0, t) = \alpha(\pi(z), t) = \alpha_t \circ \pi(z)$$

Finalement $\pi \circ j_t = \alpha_t \circ \pi$, ce qui prouve (1).

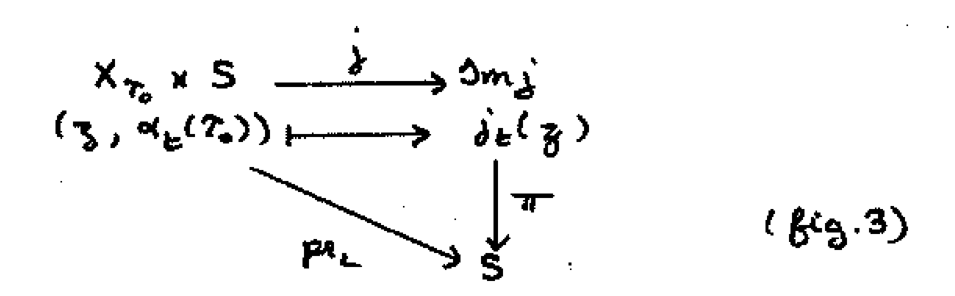


(fig. 2)

Notre intégrale s'écrit :

$$f(\alpha_{\tau_0}(t)) = \int_{h(\alpha_{\tau_0}(t))} \omega = \int_{h(\tau_0)} j_t^{*}\omega \qquad (2)$$

En effet, j_t définit une trivialisation de la fibration π restreinte au segment $S = \{ \alpha_t(\tau_0) \,/\, t \in \mathbb{R}_+ \}$ (cf. fig. 3) de sorte que le faisceau d'homologie $H_p(X/T)|_S$ soit trivial au dessus de S. Il est alors évident que $h(\alpha_t(\tau_0)) = (j_t)_*(h(\tau_0))$, d'où (2) en utilisant la formule classique [PHA] II-1.5 p 28.



(fig. 3)

La donnée d'une structure riemannienne sur la variété X permet de définir la norme d'une forme différentielle $\omega \in \Omega^p(X)$ en un point z de X. On pose

$$\| \omega \|_z \doteq \| \omega(z) \|_z \doteq \sup_{\substack{u_i \in T_z X \\ u_i \neq 0}} \frac{|\omega(z)(u_1, \ldots, u_p)|}{\|u_1\| \ldots \|u_p\|}$$

et la formule (2) nous offre la majoration :

$$\boxed{\, |f(\alpha_{\tau_0}(t))| \leq \mathrm{mes}\,(h(\tau_0)) \,.\, \sup_{z \in h(\tau_0)} \| j_t^{*}\omega \|_z \,}$$

(cf. lemme 0.2.5)

Pour montrer la croissance modérée de f près de l'origine, il suffit de montrer que $\| j_t^* \omega \|_z$ est majorée par une exponentielle de t lorsque t tend vers $+\infty$, la majoration étant uniforme en z lorsque z parcourt le support d'un cycle de classe $h(\tau_0)$, et uniforme en τ_0 lorsque τ_0 parcourt un arc fini a_0 d'un cercle de centre O dans D (cf fig. 2)

(3) <u>Comme ξ est un champ C^∞ à support compact, les difféomorphismes $j_t : X \longrightarrow X$ $(t \geq 0)$ sont localement lipschitziens de constante $M e^{\lambda t}$ (où $M \geq 1$ et $\lambda > 0$).</u>

Soit (U, φ) une carte de X telle que U soit un voisinage normal de tous ses points, $\overline{U}$ compact, φ définie sur un voisinage de $\overline{U}$ et $\varphi(U)$ convexe dans $\mathbb{R}^{2n}$. Soit d la distance riemannienne sur X. Il existe $m_U, M_U > 0$ telles que :

$$\forall x, y \in U \qquad m_U \| \varphi(x) - \varphi(y) \| \leq d(x,y) \leq M_U \| \varphi(x) - \varphi(y) \|$$

Le champ de vecteurs $\tilde{\xi} \doteq \varphi_* \xi$ est lisse et lipschitzien sur $\varphi(U)$ de constante $\lambda > 0$. D'après ([LAN] Corollaire 1 p 59) les difféomorphismes $g_t : \varphi(U) \longrightarrow \varphi(U)$ obtenus par intégration de $\tilde{\xi}$ sont encore lipschitzien de constante $e^{\lambda t}$, ie :

$$\forall x, y \in U \qquad \| g_t(\varphi(x)) - g_t(\varphi(y)) \| \leq e^{\lambda t} \| \varphi(x) - \varphi(y) \|$$

Ici $j_t(x)$ désigne la courbe intégrale de ξ vérifiant $j_0(x) = x$,
et $g_t(x)$ désigne la courbe " de $\tilde{\xi}$ " $g_0(\varphi(x)) = \varphi(x)$.
Il est clair que : $g_t(\varphi(x)) = \varphi(j_t(x))$ pour tout $x \in U$, de sorte que :

$$\| \varphi(j_t(x)) - \varphi(j_t(y)) \| \leq e^{\lambda t} \| \varphi(x) - \varphi(y) \|$$

Ainsi :

$$d(j_t(x), j_t(y)) \leq \frac{M_U}{m_U} e^{\lambda t} d(x,y) .$$

Recouvrons le compact $\operatorname{Supp} \xi$ par un nombre fini de domaines de cartes U du type précédent et choisissons pour constante λ la borne supérieure des constantes obtenues sur chacune de ces cartes.

Il existe $M > 0$ dépendant seulement du support de ξ et de la structure riemannienne sur X telle que pour tout domaine U de ce recouvrement $\{U\}_U$ on ait :

$$(4) \qquad \forall x, y \in U \qquad d(j_t(x), j_t(y)) \leq M e^{\lambda t} d(x,y)$$

Si x et y n'appartiennent pas au support de ξ, $j_t(x) = x$ et $j_t(y) = y$ de sorte que l'inégalité (4) soit encore vraie pour $t \geq 0$ et λ précédemment fixé, quitte à choisir une constante $M \geq 1$.
On peut donc adjoindre l'ouvert $\complement$ Supp ξ au recouvrement $\{U\}_U$ et écrire (4) pour chaque ouvert du recouvrement de X ainsi obtenu.
On résume cette situation en écrivant (3).

(3) montre l'existence d'une constante M' dépendant seulement du support de ξ et de la structure riemannienne telle que :

$$\forall z \in X \qquad \| T_z j_t \|_z \leq M' e^{\lambda t}$$

(cf. lemme 0.2.6)

De sorte que l'on puisse majorer $\| j_t^* \omega \|_z$:

$$\boxed{\| j_t^* \omega \|_z \leq M'^p e^{\lambda p t} \| \omega \|_{j_t(z)}}$$

(cf. lemme 0.2.2)

Le facteur $M'^p e^{\lambda p t}$ est bien du type voulu et il reste seulement à majorer $\| \omega \|_{j_t(z)}$.

Troisième étape : Majoration de $\| \omega \|_{\mathcal{Y}_t(z)}$

3.1.1 Lemme : Pour tout point y de Y il existe une carte (U, φ) en y et une constante $K > 0$ telles que $s(z) = z_1 \cdots z_p$ soit une équation locale de Y dans U et :

(i) $|\xi(|s|)| \leq K|s|$

(ii) $|\xi(\arg s)| \leq K$

preuve : Soit $g \in C^\infty(X \setminus Y)$. Si (U, φ) est une carte en $y \in Y$ telle que $s(z) = z_1 \cdots z_p = 0$ soit une équation de Y dans U, notons $\tilde{\xi} = \varphi_* \xi$ le champ transporté sur $\varphi(U)$.
Par définition :

$$\forall z \in \varphi(U) \qquad \tilde{\xi}_z (g \circ \varphi^{-1}) = \xi_{\varphi^{-1}(z)} (g)$$

On fera l'abus d'écrire $g \circ \varphi^{-1} = g$ puisque aucune confusion est possible.
Tout revient donc à majorer $|\tilde{\xi}(g)|$ lorsque $g = |s|$ ou $g = \arg s$.

(i) Cas où $g = |s|$:
On peut supposer, quitte à restreindre la carte (U, φ), que $\varphi(U)$ est un voisinage convexe borné de $0 = \varphi(y)$ et que φ^{-1} est définie sur un voisinage de $\overline{\varphi(U)}$.
Le champ $\tilde{\xi}$ est tangent à $Y : z_1 \cdots z_p = 0$, donc il s'écrira :

$$\tilde{\xi} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_1' \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \xi_n' \frac{\partial}{\partial y_n}$$

où $\xi_i(z) = \xi_i'(z) = 0$ dès que $z_i = x_i + i y_i = 0$, $(1 \leq i \leq p)$.

Le théorème des accroissements finis appliqué aux fonctions C^∞ ξ_i et ξ_i' montre l'existence d'une constante K telle que :

$$\forall z = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \varphi(U) \qquad (1 \leq i \leq p)$$

$$\begin{cases} |\xi_i(z)| = |\xi_i(z) - \xi_i(x_1, \ldots, y_{i-1}, 0, 0, x_{i+1}, \ldots, y_n)| \leq K\sqrt{x_i^2 + y_i^2} = K|z_i| \\ |\xi_i'(z)| = |\xi_i'(z) - \xi_i'(x_1, \ldots, y_{i-1}, 0, 0, x_{i+1}, \ldots, y_n)| \leq K|z_i| \end{cases}$$

Ainsi : $\tilde{\mathfrak{F}}(|s|) = \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{F}_i \frac{\partial}{\partial x_i} |z_1 \cdots z_p| + \mathfrak{F}_i' \frac{\partial}{\partial y_i} |z_1 \cdots z_p|$

$$= \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{F}_i \frac{x_i}{|z_i|} |z_1| \cdots \widehat{|z_i|} \cdots |z_p| + \mathfrak{F}_i' \frac{y_i}{|z_i|} |z_1| \cdots \widehat{|z_i|} \cdots |z_p|$$

$$|\tilde{\mathfrak{F}}(|s|)| \leq \sum_{i=1}^{p} K \left(|x_i| + |y_i|\right) |z_1| \cdots \widehat{|z_i|} \cdots |z_p|$$

$$\leq 2Kp\, |z_1| \cdots |z_p| \qquad \text{car } |x_i| + |y_i| \leq 2 |z_i|$$

$$|\tilde{\mathfrak{F}}(|s|)| \leq 2Kp\, |s|$$

ce qui prouve (i).

(ii) Cas où $g = \arg s$: On utilise les mêmes ingrédients que ci-dessus :

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\arg s) = \sum_{i=1}^{p} \mathfrak{F}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \arg(z_1 \cdots z_p) + \mathfrak{F}_i' \frac{\partial}{\partial y_i} \arg(z_1 \cdots z_p)$$

où
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \arg(z_1 \cdots z_p) = -\dfrac{y_i}{|z_i|^2} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y_i} \arg(z_1 \cdots z_p) = \dfrac{x_i}{|z_i|^2} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} z_i = x_i + i y_i \\ 1 \leq i \leq p \end{array}$$

Ainsi :

$$|\tilde{\mathfrak{F}}(\arg s)| \leq \sum_{i=1}^{p} K |z_i| \left(\frac{|y_i| + |x_i|}{|z_i|^2} \right) \leq 2Kp$$

ce qui prouve (ii)

Les majorations du lemme 3.1.1 sont triviales au voisinage de tout point de $X \setminus Y$ ou de $\complement \mathrm{Supp}\, \xi$ (dans le premier cas, il suffit de choisir une carte (U, φ) dont le domaine n'intercepte pas Y et de prendre $s=1$).
On peut choisir un recouvrement localement fini $\{U_i\}_{i \in I}$ de X formé de domaines de cartes (U_i, φ_i) où les majorations du lemme 3.1.1 ont lieu.
Comme le support de ξ est compact, seul un nombre fini de cartes (U_i, φ_i) vont intercepter $\mathrm{Supp}\, \xi$ et l'on peut choisir la constante K indépendamment du choix du domaine U_i du recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$.

On peut supposer, quitte à réduire les domaines U_i, que :

1) U_i est relativement compact,
2) φ_i est définie sur un voisinage de $\overline{U_i}$,
3) Si $U_i \cap Y \neq \emptyset$, la carte $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ vérifie $|z_i| < 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

<u>Fixons ce recouvrement</u> $\{U_i\}_{i \in I}$ dans toute la suite de la démonstration.

Rappelons que $s_i(z) = z_1 \cdots z_p$ (resp. $s_i = 1$) est une équation analytique de Y dans U_i lorsque $U_i \cap Y \neq \emptyset$ (resp. $U_i \cap Y = \emptyset$)

$\sigma_i(z) \doteq |s_i(z)|^2$ est une équation C^∞ de Y dans U_i, et si $\{h_i\}_{i \in I}$ désigne une partition C^∞ de l'unité associée au recouvrement localement fini $\{U_i\}_{i \in I}$, l'équation :

$$\sigma = \sum_{i \in I} h_i \sigma_i$$

définit une <u>équation globale C^∞ de Y</u>, positive.

On construit une triangulation semi-analytique (K,L) de la paire (X,Y) telle que l'étoile de chaque sommet de la triangulation K soit incluse dans le domaine U_i du recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$.

On désire majorer $\|\omega\|_{j_t(z)}$ le long des courbes intégrales $j_z(t)$ de ξ pour $t \to +\infty$ et lorsque $j_z(0)=z$ varie dans le compact $Z \doteq \bigcup_{\tau\in Q} h(\tau)$ qui ne rencontre pas Y.

On peut prendre l'arc de cercle Q dans D de rayon suffisamment petit de sorte que Z, et par suite l'ensemble $\{j_z(t) / z\in Z \text{ et } t\geq 0\}$, soient inclus dans $\pi^{-1}(B)$ où $B\subset B'\subset D$ (B et B' sont introduits à la 2e étape). Le compact $\pi^{-1}(B')$ rencontre seulement un nombre fini de domaines U_i, $i\in I$, et de simplexes $\underline{k}$ de K, ce qui justifie l'hypothèse de travail suivante :

Hypothèse : La triangulation (K,L) et le recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ sont finis

Le lemme 3.1.1(i) donne la minoration suivante :

Corollaire 3.1.2 : Pour tout compact Z du type défini ci-dessus, on a :

$\exists \alpha,\beta>0 \quad \forall t\geq 0 \quad \sigma(j(t)) \geq \alpha e^{-\beta t}$

l'inégalité ayant lieu pour toutes les courbes intégrales $j:\mathbb{R}_+\to X$ d'origine $j(0)\in Z$.

preuve :

On a $|\xi(\sigma_i)| \leq 2K\sigma_i$

En effet, si $z\in U_i$: $\quad \xi_z(\sigma_i) = \xi_z(|s_i|^2) = 2|s_i(z)|\,\xi_z(|s_i|)$

donc : $\quad |\xi_z(\sigma_i)| \leq 2K\,|\sigma_i(z)|$ compte tenu de (i).

D'autre part :

$$\xi_z(\sigma) = \xi_z\Big(\sum_{i\in I} h_i\sigma_i\Big) = \sum_{i\in I} \xi_z(h_i)\,\sigma_i(z) + h_i(z)\,\xi_z(\sigma_i)$$

Comme $z \mapsto \Xi_z(h_i)$ est continue, $|\Xi_z(h_i)|$ est majorée par une constante c lorsque z varie dans U_i. On peut prendre c indépendante de i car la somme est finie. Ainsi :

$$|\Xi_z(\sigma)| \leq c \sum_{i \in I} \sigma_i(z) + \sum_{i \in I} h_i(z) \, |\Xi_z(\sigma_i)|$$

On peut montrer l'existence d'une constante $d > 0$ telle que :

$$\forall i, j \in I \quad \forall z \in U_i \cap U_j \qquad \sigma_i(z) \leq d \, \sigma_j(z)$$

de sorte qu'il existe $e > 0$ telle que $\sum_{i \in I} \sigma_i(z) \leq e \, \sigma(z)$.

D'où :

$$|\Xi_z(\sigma)| \leq c.e \, \sigma(z) + \sum_{i \in I} h_i(z) . 2K \sigma_i$$

$$|\Xi_z(\sigma)| \leq (ce + 2K) \, \sigma(z)$$

En posant $k = ce + 2K > 0$, on obtient :

$$|\Xi(\sigma)| \leq k . \sigma \qquad (5)$$

Exprimons (5) en un point $z = j(t)$ de la courbe j. On obtient :

$$|j'(t)(\sigma)| \leq k \, \sigma(j(t))$$

$$\left|\frac{d}{dt}(\sigma \circ j)\right| \leq k \, \sigma \circ j(t)$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme de Gronwall (6) donné ci-dessous pour obtenir pour tout $t \geq 0$:

$$\sigma \circ j(t) \geq \sigma \circ j(0) \, e^{-kt}$$

On a montré 3.2.1 en prenant $\alpha = \operatorname{Inf}_{z \in Z} \sigma(z)$ et $\beta = k$.

(6) <u>Lemme de Gronwall</u> :

Si $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $\varphi'(t) + k\varphi(t) \geq 0$ pour tout t (où $k > 0$), alors :

$$\forall t \geq 0 \qquad \varphi(t) \geq \varphi(0) \, e^{-kt}$$

En effet, $\psi(t) \doteq (\varphi(t) - \varphi(0) e^{-kt}) e^{kt}$ vérifie $\psi(0) = 0$ et $\psi'(t) = (\varphi'(t) + k\varphi(t)) e^{kt} \geq 0$. CQFD

Notons $\widetilde{K\setminus L}$ l'ensemble des relèvements dans $\tilde{X}^* = \widetilde{X\setminus Y}$ des simplexes de $K\setminus L$.

Si k et k' sont 2 simplexes de $\widetilde{K\setminus L}$, on définit l'écart $\Delta_{kk'}$ entre k et k' comme étant la longueur minimale d'une chaine de simplexes de $\widetilde{K\setminus L}$ joignant k à k', ie d'une suite de simplexes de $\widetilde{K\setminus L}$ dont 2 simplexes consécutifs sont incidents l'un à l'autre.

<u>lemme 3.1.3</u>: Soit k_0 un simplexe de référence fixé dans $\widetilde{K\setminus L}$.
$\exists c>0 \ \exists a>1 \ \exists p\in\mathbb{N} \ \forall \underline{k}\in K\setminus L$ $\forall\omega$ détermination de ω sur $\underline{k}$
$$\forall z\in\underline{k} \quad \|\omega\|_z \leq c \cdot \frac{a^{\Delta_{k_0k}}}{\sigma(z)^p}$$
où k désigne le simplexe de $\widetilde{K\setminus L}$ associé à ω.

preuve :
Pour chaque simplexe $\underline{k}\in K\setminus L$, choisissons une base $b_{\underline{k}}$ de l'espace vectoriel des détermination de ω sur $\underline{k}$ et fixons une détermination $\omega_{\underline{k}}$ de ω sur $\underline{k}$.
Soit $k_{\omega_{\underline{k}}}$ le simplexe de $\widetilde{K\setminus L}$ associé à $\omega_{\underline{k}}$.

On a :
$$\omega_{\underline{k}}(z) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} \omega_{i_1\dots i_p}(z)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_p} \quad \forall z=(x,t)\in\underline{k}$$

Comme ω est à croissance modérée le long de Y, chaque détermination $\omega_{\underline{k}}$ satisfait dans $\underline{k}$ à une majoration :

(7) $$\exists c_{\underline{k}}>0 \ \exists p_{\underline{k}}\in\mathbb{N} \quad \forall z\in\underline{k} \quad \|\omega_{\underline{k}}\|_z \leq \frac{c_{\underline{k}}}{\sigma(z)^{p_{\underline{k}}}}$$

* <u>preuve de (7)</u> : Il faut d'abord s'apercevoir que majorer $\|\omega_{\underline{k}}\|_z$ revient à majorer chacune des fonctions $\omega_{i_1\dots i_p}$ intervenant dans l'expression locale de $\omega_{\underline{k}}$ dans la carte (U_i,φ_i), $i\in I$, contenant $\underline{k}$.

On possède les normes $\|\omega\|_{2,z} = \sup_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} |\omega_{i_1\dots i_p}(z)|$

et $\|\omega\|_z = \sup \dfrac{|\omega(z)(u_1,\dots,u_p)|}{\|u_1\|\dots\|u_p\|}$

sur l'espace $\Lambda^p T_z^* X$, où $z \in U_i$.

Les espaces vectoriels $\Lambda^p T_z^* X$ sont de dimension finie, donc toutes les normes $\|\omega\|_{2,z_0}$ et $\|\omega\|_{z_0}$ sont équivalentes pour tout $z_0 \in U$.

Comme les applications $z \longmapsto \|\omega\|_{2,z}$ et $z \longmapsto \|\omega\|_z$ sont continues sur U_i, on aura bien l'existence de constantes $m_{z_0}, M_{z_0} > 0$ telles que

$$m_{z_0} \|\omega\|_{2,z} \le \|\omega\|_z \le M_{z_0} . \|\omega\|_{2,z}$$

pour tout z voisin de z_0. En recouvrant le compact $\overline{U}_i$ par un nombre fini de tels voisinages, on obtient 2 constantes $m, M > 0$ telles que :

$$\forall z \in U_i \quad m \|\omega\|_{2,z} \le \|\omega\|_z \le M \|\omega\|_{2,z}$$

Tout revient donc à majorer $\|\omega\|_{2,z}$:

* Majorons $\|\omega\|_{2,z}$ pour avoir (7).

Chaque fonction $\omega_{i_1\dots i_p}$ est multiforme à croissance modérée le long de Y, donc vérifie :

$$|\omega_{i_1\dots i_p}(z)| \le \frac{c}{|s_i(z)|^w} \qquad \forall z \in U_i$$

et il est facile de minorer $|s_i(z)|$ par une puissance de $\sigma(z) = \sum_{i\in I} h_i(z)\, \sigma_i(z)$, comme on le constate :

U_i, s_i $\quad$ U_j, s_j $\quad$ z

Si $z \in U_i \cap U_j$, $(i,j) \in I^2$ et si s_i, s_j sont les équations locales de Y dans U_i, U_j, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $s_i^N(z') = a(z')\, s_j(z')$ où $a(z')$ est une fonction analytique sur un voisinage de z (cf Th. des zéros d'Hilbert analytique)

L'égalité précédente est vraie sur un voisinage de z. Quitte à restreindre ce voisinage, il existera une constante $M_z > 0$ telle que

$$(*) \qquad |s_i^N(z)| \leq M_z \, |s_j(z)|$$

On a supposé les U_i relativement compacts et les cartes φ_i définies sur un voisinage ouvert de $\bar{U}_i$. Recouvrons le compact $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j$ par un nombre fini d'ouverts où la majoration $(*)$ a lieu et notons M le maximum des constantes M_z ainsi obtenues. Notons bien que si $(*)$ est vraie pour N, alors $(*)$ est à fortiori vraie pour $N' \geq N$ puisque $|s_i(z)| \leq 1$.
Il existera donc $N \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ telles que :

$$(**) \qquad \forall z \in U_i \cap U_j \qquad |s_i^N(z)| \leq M \, |s_j(z)|$$

Le recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ étant fini, on peut supposer que les constantes M et N intervenant dans $(**)$ sont indépendantes des indices i et j.
Comme $\sigma_i = |s_i|^2$, on aura :

$$\forall i, j \in I \quad \forall z \in U_i \cap U_j \qquad |\sigma_i^N(z)| \leq M \, |\sigma_j(z)|$$

d'où la majoration de :

$$|\sigma(z)| \leq \sum_{i \in I} h_i(z) \sup_{i \in J} |\sigma_i(z)| = \sup_{i \in J} |\sigma_i(z)|$$

où $J = \{i \in I \ / \ z \in U_i\}$

$$|\sigma(z)|^N \leq \sup_{i \in J} |\sigma_i^N(z)| \leq M \, |\sigma_j(z)| \quad \text{pour tout } j \in J$$

On aura bien

$$|\omega_{i_1 \dots i_p}(z)| \leq \frac{c}{|s_i(z)|^w} \leq \frac{c}{|\sigma_i(z)|^w} \leq \frac{M^w c}{|\sigma(z)|^{Nw}}$$

comme prévu.
Ce qui prouve l'affirmation (7).

<u>Remarque</u> : $\|\omega_{\underline{k}}\|_z$ satisfait une majoration du même type (7) pour tout $p \geq p_{\underline{k}}$ quitte à changer la constante $c_{\underline{k}}$ (si $p = p_{\underline{k}} + r$, $\sup_{z \in \underline{k}} \sigma(z) \leq M \Rightarrow \frac{1}{\sigma(z)^r} \geq \frac{1}{M^r}$ et il suffit de prendre $c_{\underline{k}} \cdot M^r$ à la place de $c_{\underline{k}}$.)

Comme le nombre de simplexes de $K \setminus L$ est fini, on peut prendre $p = \sup_{\underline{k} \in K \setminus L} p_{\underline{k}}$, écrire les majorations (7) correspondantes de $\|\omega_{\underline{k}}\|_z$, puis poser $c' = \sup c_{\underline{k}}$, de sorte que l'on ait :

$$\forall \underline{k} \in K \setminus L \quad \forall z \in \underline{k} \qquad \|\omega_{\underline{k}}\|_z \leq \frac{c'}{\sigma(z)^p}$$

Si $\underline{k}$ et $\underline{k}'$ sont 2 simplexes contigus de $K \setminus L$, notons $A_{\underline{k},\underline{k}'}$ la matrice de changement de base de $b_{\underline{k}}$ à $b_{\underline{k}'}$.

Soit ω une détermination quelconque de ω sur $\underline{k}$ et $k \in \widetilde{K \setminus L}$ le simplexe associé à ω. Il existe une chaîne $\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n$ de $n+1$ simplexes de $K \setminus L$ (ie $(\underline{k}, \underline{k}_1)$ et $(\underline{k}_i, \underline{k}_{i+1})$ sont contigus, $1 \leq i \leq n-1$) telle que $\underline{k}_n = \underline{k}$ et telle que ω soit la détermination de ω obtenue par prolongement analytique de $\omega_{\underline{k}}$ le long de cette chaîne.

Alors :

$$\forall z \in \underline{k} \qquad \|\omega\|_z = \| A_{\underline{k}_{n-1},\underline{k}_n} \circ \dots \circ A_{\underline{k},\underline{k}_1}(\omega_{\underline{k}})\|_z$$

$$\leq \| A_{\underline{k}_{n-1},\underline{k}_n}\| \dots \| A_{\underline{k},\underline{k}_1}\| \; \|\omega_{\underline{k}}\|_z$$

$$\|\omega\|_z \leq a^n \frac{c'}{\sigma(z)^p}$$

où $a \doteq \sup_{\underline{k},\underline{k}' \in K \setminus L} \|A_{\underline{k},\underline{k}'}\|$

On peut toujours supposer que la chaîne $\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n = \underline{k}$ passe par $\underline{k}_0$, de sorte que $n = \Delta_{k_{\omega_{\underline{k}}} k_0} + \Delta_{k_0 k}$ et :

$$\forall z \in \underline{k} \qquad \|\omega\|_z \leq c' a^{\Delta_{k_{\omega_{\underline{k}}} k_0}} \cdot \frac{a^{\Delta_{k_0 k}}}{\sigma(z)^p}$$

Il suffit de prendre $c = \sup_{\underline{k} \in K \setminus L} (c' a^{\Delta_{k_{\omega_{\underline{k}}} k_0}})$ pour obtenir la majoration demandée. CQFD

Le lemme 3.1.3 donne la majoration :

$$\|\omega\|_{j_t(z)} \leq c \cdot \frac{a^{\Delta_{k_0 k(t)}}}{\sigma(j(t))^p}$$

où k_0 désigne le simplexe de $\widetilde{K \wedge L}$ se projetant sur $\underline{k}_0$, $z \in \underline{k}_0$, et associé à une détermination fixée de ω sur $\underline{k}_0$, et où $k(t)$ représente le simplexe de $\widetilde{K \wedge L}$ se projetant sur $\underline{k}(t)$ qui contient le point $j_t(z)$ et associé à la détermination de ω sur $\underline{k}(t)$ obtenue par prolongement analytique de la détermination de ω sur $\underline{k}_0$ précédente le long du chemin $j(s)$, $0 \leq s \leq t$.

Le corollaire 3.1.2 minore $\sigma(j(t))$ par une expression de la forme $\alpha e^{-\beta t}$. On obtiendra donc la majoration adéquate de $\|\omega\|_{j_t(z)}$ si l'on montre que $\Delta_{k_0 k(t)}$ a une croissance au plus linéaire en t :

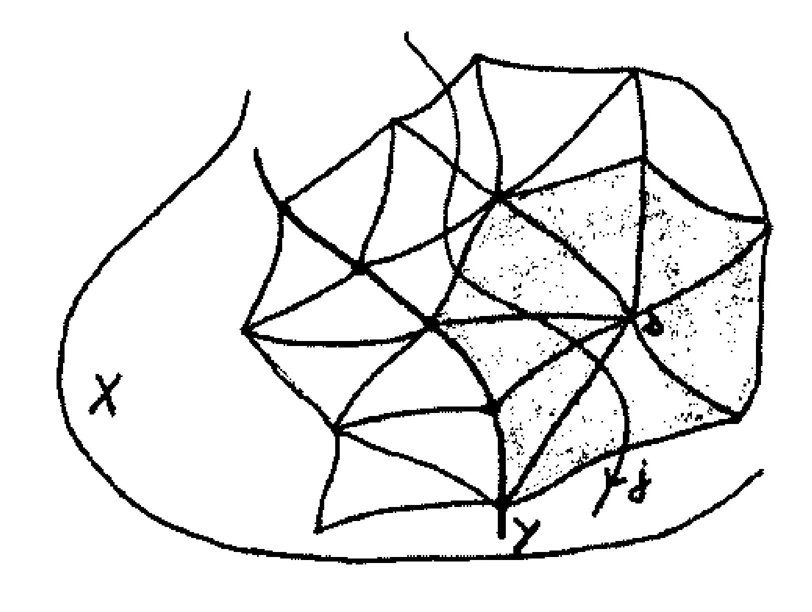
4ème Étape : La croissance de $\Delta_{k_0 k(t)}$ est au plus linéaire en t.

3.1.4 lemme :

Il existe des constantes $c, c' > 0$ telles que l'on ait la majoration $\Delta_{k_0 k(t)} \leq ct + c'$ le long de toute trajectoire intégrale $t \longmapsto j_t(z)$ du champ de vecteurs ξ.

preuve :

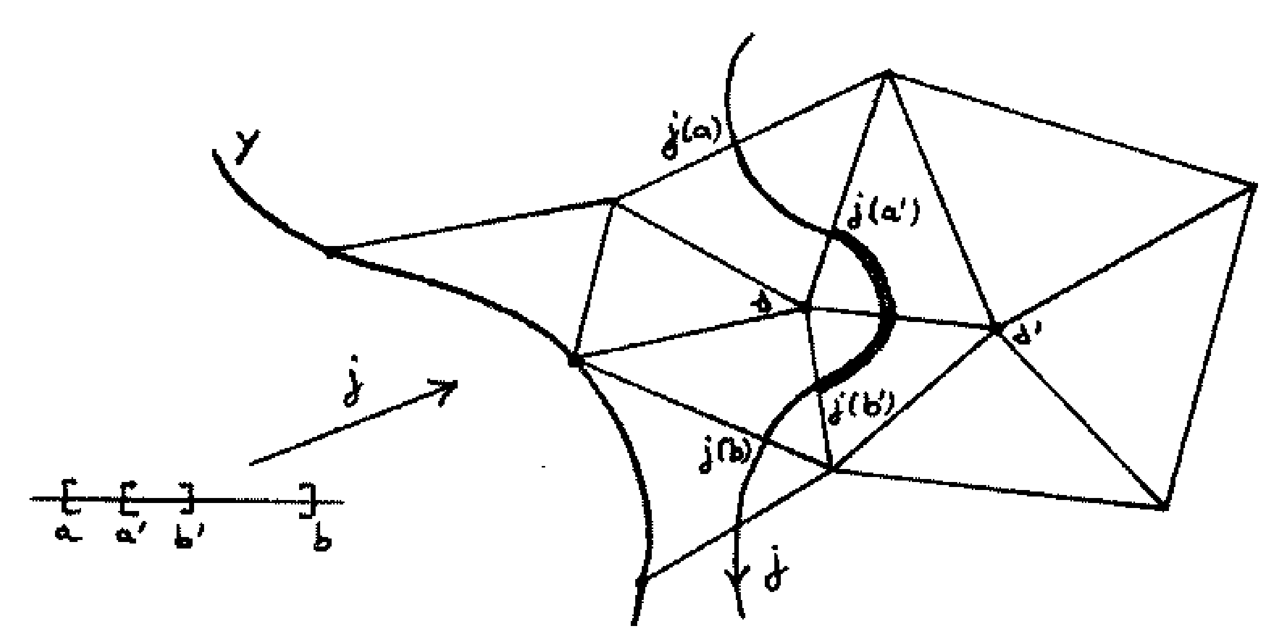
Soit $j : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ une trajectoire intégrale du champ de vecteurs ξ. Notons K_0 (resp. L_0) l'ensemble des sommets de la triangulation K (resp. L).



(fig. 4)

Si $s \in K_0$, notons $St\,s$ l'étoile ouverte de s. $St\,s$ est un ouvert de X et la famille $\{j^{-1}(St\,s)\}_{s \in K_0}$ constitue un recouvrement d'ouverts de $\mathbb{R}_+$. Chaque ouvert $j^{-1}(St\,s)$ s'écrit comme la réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}_+$. On possède ainsi un recouvrement d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}_+$ dont on peut extraire un sous-recouvrement formé d'intervalles ouverts maxi_maux que nous noterons $\{I_i\}_{i \in J}$.

1) <u>Les intervalles de ce recouvrement ont une longueur minorée par $\ell > 0$</u>.



(fig. 5) : cas où $X = \mathbb{R}^2$. Dans ce cas de figure, $]a', b'[$ ne figure pas dans le recouvrement $\{I_i\}_{i \in J}$.

Soit $i \in J$. Il existe une étoile $St\,s$, $s \in K$, et une carte (U_j, φ_j), $j \in I$, que nous noterons brièvement (U, φ), telles que :

$$j(I_i) \subset St\,s \subset U$$

Si l'on note $I_i =]a, b[$, alors $j(a)$ et $j(b)$ appartiennent à 2 faces externes distinctes et non adjacentes de $St\,s$ (sinon, I_i ne serait pas un intervalle maximal ; voir fig. 5)

Considérons la situation précédente dans $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$ et notons $g = \varphi \circ j$. $\varphi(St\,s)$ est une étoile dans $\varphi(U)$.
Soit $\delta = \operatorname{Inf} d(x,y)$ où la borne inférieure est prise pour toutes les paires de faces externes (A,B) de $\varphi(St\,s)$ non adjacentes et pour tout $(x,y) \in A \times B$. δ s'appelle le diamètre minimal de l'étoile $\varphi(St\,s)$.
Alors $g(a), g(b)$ appartiennent au bord de $\varphi(St\,s)$ et d'après la remarque faite sur $j(a)$ et $j(b)$, on a :

$$\delta \leq \| g(a) - g(b) \|$$

Le théorème des accroissements finis donne :

$$\delta \leq \sup_{t \in]a,b[} \| g'(t) \| \, . \, |b-a|$$

Majorons la vitesse $g'(t) = \varphi_* \Xi(g(t))$ de la trajectoire g par $v = \sup_{U;\, y \in \bar{U}} \| \varphi_* \Xi(y) \|$ (on rappelle que φ est définie sur un voisinage du compact $\bar{U}$), de sorte que :

$$\delta \leq v \, . \, |b-a|$$

En posant $\ell = \frac{1}{v} \operatorname{Inf}_U \delta > 0$, on obtient bien :

$$\ell \leq \operatorname{long} I_i \qquad \forall i \in J$$

2) <u>Ce recouvrement est localement fini</u> :
Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Le recouvrement $\{St\,s\}_{s \in K_0}$ est localement fini, donc il existe un voisinage ouvert W de $j(t)$ tel que :

$$\{ s \in K_0 \ / \ W \cap St\,s \neq \emptyset \} = \{ s_1, \ldots, s_\ell \} \qquad (*)$$

En fait, la triangulation (K,L) peut être supposée finie, de sorte que l'on aura toujours $\ell \leq m$ où m désigne le nombre de sommets de la triangulation K.
Si $s \in K_0$, notons $j^{-1}(St\,s) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{k,s}$ la décomposition de l'ouvert $j^{-1}(St\,s)$ en réunion disjointe d'intervalles, et si $t \in j^{-1}(St\,s)$, supposons que $t \in I_{0,s}$.

Montrons que le voisinage ouvert :

$$I = j^{-1}(W) \cap \left(\bigcap_{u=1}^{\ell} I_{0,s_u} \right)$$

de t vérifie $\# \{ i \in J \ / \ I \cap I_i \neq \emptyset \} \leq m^2$

Si $x \in I \cap I_i$, il existe $(k, s) \in \mathbb{N} \times K_o$ tels que $x \in I_{k,s} \subset I_i$. Alors $j(x) \in W \cap St\,s$ donc $s = s_u$ pour un indice u convenable dans $[1, \ell]$ (cf $(*)$). Alors $x \in I_{k,s_u}$ et $x \in I_{o,s_u}$ (par définition de I) donc $I_{k,s_u} = I_{o,s_u}$ (puisque les réunions $\bigcup_k I_{k,s_u}$ sont disjointes)

Finalement I_i est un intervalle maximal de la subdivision $\{I_i\}_{i\in J}$ tel que $I_{o,s_u} \subset I_i$. Comme $St\,s_u$ rencontre au plus m étoiles $St\,s$, $s \in K_o$, il est clair que I_{o,s_u} peut être inclus dans au plus m intervalles maximaux I_i.
Cela fait au plus m^2 intervalles I_i vérifiant $I \cap I_i \neq \emptyset$.
CQFD

3) Sur chaque intervalle I_i du recouvrement $\{I_i\}_{i\in J}$, l'écart $\Delta_{kk'}$ est majoré par une expression de la forme $c_1(t'-t) + c_2$ où c_1, c_2 sont des constantes positives indépendantes de $i \in J$ et où $t, t' \in I_i$ vérifient $j(t') \in \underline{k}'$ et $j(t) \in \underline{k}$ avec $t' > t$.

On désire majorer l'écart $\Delta_{kk'}$ entre 2 simplexes k, k' de $\widetilde{K \setminus L}$ se projetant sur les simplexes $\underline{k}$, $\underline{k}'$ de $K \setminus L$ adhérents à un même sommet s de K, k correspondant au choix d'une branche de ω sur $\underline{k}$ et k' correspondant à la branche $(\omega)_\gamma$ obtenue par prolongement analytique de ω le long du chemin $\gamma = \{j(t) \;/\; t \in I_i\}$ inclus dans $St\,s$.

Pour tout $i \in J$, il existe $s \in K_o$ tel que $j(I_i) \subset St\,s$. Cela étant :

* L'assertion 3) est triviale si $s \in K_o \setminus L_o$ puisque l'étoile de s est alors un ouvert simplement connexe de $X \setminus Y$. L'écart $\Delta_{kk'}$ entre 2 simplexes se projetant en $\underline{k}$, $\underline{k}'$ de sommet s est donc majoré par le nombre de simplexes de l'étoile $St\,s$.

* Si $s \in L_o$, la majoration 3) provient du lemme 3.1.1 (ii) et du lemme suivant :

<u>lemme 3.1.5</u> : $\exists c_1, c_2 > 0 \ \forall k, k' \in \widetilde{K \setminus L}$ tels que les projections $\underline{k}, \underline{k}' \in K \setminus L$ sont adhérents à un même sommet $s \in L$ et tels qu'il existe un chemin γ contenu dans St_s liant $\underline{k}$ à $\underline{k}'$, k correspondant au choix d'une branche de ω sur $\underline{k}$ et k' correspondant à la branche de ω sur $\underline{k}'$ obtenue par prolongement analytique de la branche précédente le long du chemin γ, on a :

$$\Delta_{kk'} \leq c_1 \left(|\arg z_1|_{k,k'} + \dots + |\arg z_p|_{k,k'} \right) + c_2$$

où $s(z) = z_1 \cdots z_p$ est une équation locale de Y dans l'étoile de s,
$|\arg z_i|_{k,k'}$ = variation totale de l'argument de z_i le long de γ (cette variation dépendant uniquement de k et de k', et non du choix de γ)

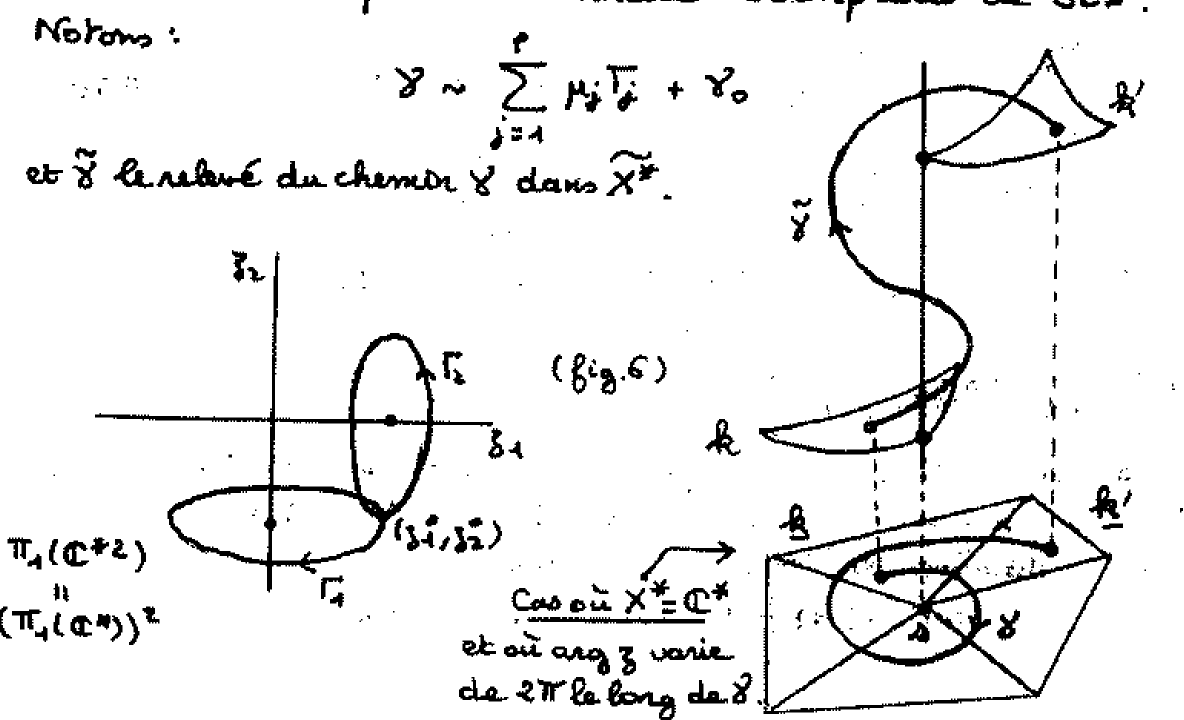
preuve :

Notons qu'on est bien dans les hypothèses de ce lemme pour le chemin $\gamma = \{ j(t) \ / \ t \in I_i \} \subset St_s$.

On rappelle que le groupe fondamental de $\mathbb{C}^n \setminus \{z_1 \cdots z_p = 0\}$ est engendré par les lacets $\Gamma_i(t) = (z_1^\circ, \dots, z_{i-1}^\circ, z_i^\circ e^{i2\pi t}, z_{i+1}^\circ, \dots, z_n^\circ)$, $(1 \leq i \leq p)$, où $z_1^\circ \cdots z_p^\circ \neq 0$, et que l'étoile St_s est incluse dans le domaine U d'une carte telle que $z_1 \cdots z_p = 0$ soit une équation de Y dans U.
Le chemin γ est homotope à une combinaison linéaire finie des générateurs $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ suivie d'un morceau de chemin γ_0 inclu dans une réunion simplement connexe de simplexes de St_s.
Notons :

$$\gamma \sim \sum_{j=1}^{p} \mu_j \Gamma_j + \gamma_0$$

et $\tilde{\gamma}$ le relevé du chemin γ dans $\widetilde{X^*}$.



(fig.6)

le nombre de simplexes traversés par $\tilde{\gamma}$ est étroitement lié à la variation de l'argument de z_j $(1 \leq j \leq p)$ le long de γ. D'une façon plus précise, $\arg z_j$ varie de 2π le long de Γ_j, donc la contribution de Γ_j dans le calcul du nombre de simplexes traversés par $\tilde{\gamma}$ sera majoré par

$$\frac{|\arg z_j|_{\Gamma_j}}{2\pi} \cdot \nu(s)$$

où $\nu(s)$ désigne le nombre total de simplexes dans $St\, s$ et où $|\arg z_j|_{\Gamma_j}$ est la variation totale de l'argument de z_j le long du chemin Γ_j.

Ainsi :

$$\Delta_{kk'} \leq \sum_{j=1}^{p} \frac{|\arg z_j|_{\Gamma_j}}{2\pi} \nu(s) + \nu(s)$$

le dernier terme de la somme du second membre étant une majoration de la contribution du chemin γ_0 à $\Delta_{kk'}$.

Si $\nu \doteq \text{Max} \{\nu(s) \,/\, s \in K_0\}$, on aura :

$$\Delta_{kk'} \leq \frac{\nu}{2\pi} \left(|\arg z_1|_\gamma + \dots + |\arg z_p|_\gamma \right) + \nu$$

i.e. $$\Delta_{kk'} \leq \frac{\nu}{2\pi} \left(|\arg z_1|_{k,k'} + \dots + |\arg z_p|_{k,k'} \right) + \nu$$

avec les notations de l'énoncé.

CQFD

Montrons 3) : Le lemme 3.1.1 (ii) offre une majoration du même type que la suivante :

$$|\tilde{\xi}(g)| \leq K \quad \text{où} \quad g = \arg z_j \;,\; 1 \leq j \leq p \;,\; \text{et } s = z_1 \cdots z_p$$

En effet, $\tilde{\xi}(g) = \xi_j \left(-\dfrac{y_j}{|z_j|^2} \right) + \xi_j' \left(\dfrac{x_j}{|z_j|^2} \right)$

donc $|\tilde{\xi}(g)| \leq K \dfrac{|x_j| + |y_j|}{|z_j|} \leq 2K \leq 2Kp$

Ainsi $\left| \dfrac{d}{dt} \arg z_j(t) \right| \leq K$.

Si t_0 est choisi dans I_i tel que $j(t_0)$ appartienne au simplexe $\underline{k}$ de $St\, s$, pour tout $t \in I_i$, $t > t_0$, tel que $j(t) \in \underline{k}'$ on aura (Théorème des accroissements finis) :

$$|\arg z_j(t) - \arg z_j(t_0)| \leq K(t - t_0)$$

d'où $|\arg z_j|_{kk'} \leq K(t-t_0)$ lorsque le chemin γ du lemme 3.1.5 est un sous-chemin de la courbe intégrale $j(t)$ de Ξ.
Ainsi :

$$\Delta_{kk'} \leq n c_1 K(t-t_0) + c_2$$

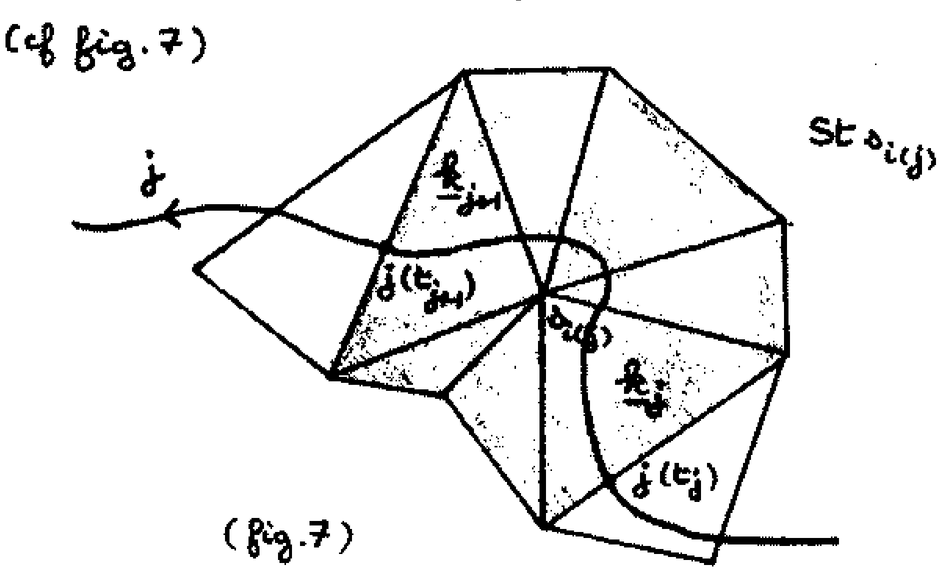
4) preuve du lemme 3.1.4 :
Il n'y a jamais plus de m^2 intervalles du recouvrement $\{I_i\}_{i\in J}$ qui se chevauchent d'après 2) et la longueur de chaque intervalle I_i est au moins ℓ. Par suite on rencontrera au plus $k m^2$ intervalles I_i, $i \in J$, lorsque u varie de 0 à t où $t \in [(k-1)\ell, k\ell]$ (récurrence sur k : s'il y avait plus de m^2 intervalles I_i qui débutent entre $(k-1)\ell$ et $k\ell$, ces intervalles s'intercepteraient)

Soit $\Delta_{k_0 k(t)}$ l'écart entre le simplexe k_0 se projetant sur $\underline{k}_0$ contenant $j(0)$ et associé à une détermination quelconque ω, et le simplexe $k(t)$ se projetant sur $\underline{k}(t)$ contenant $j(t)$ et associé à la détermination de ω sur $\underline{k}(t)$ obtenue par prolongement analytique de la détermination précédente sur $\underline{k}_0$ le long du chemin j.

Soit $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_{n(t)-1} < t$ une subdivision croissante de l'intervalle $[0,t]$ telle que, si l'on note $I_i =]a_i, b_i[$ pour chaque $i \in J$, on ait :

$$\{a_i \ / \ a_i \in [0,t[\ \} = \{ t_j \ / \ j \in [0, n(t)-1] \}$$

(cf fig. 7)



(fig. 7)

Alors $n(t)$ est inférieur au nombre d'intervalles I_i qui interceptent $[0,t]$, c'est à dire :

$$n(t) \leq k\, m^2 \qquad \text{où} \quad (k-1)\ell \leq t \leq k\ell \quad , k \in \mathbb{N}$$
$$\leq \left(\frac{t}{\ell}+1\right) m^2$$

On a :

$$\Delta_{k_0 k(t)} \leq \sum_{j=1}^{n(t)-1} \Delta_{k_{j-1} k_j} + \Delta_{k_{n(t)-1} k(t)}$$

où k_j représente la simplexe de $\widetilde{K \setminus L}$ au dessus de $\underline{k}_j$ tel que $j(t_j) \in \underline{k}_j$ et $\underline{k}_j \subset St\, s_{i(j)}$ (cf fig. 7) et associé à la détermination adéquate de ω.

D'après le 3) :

$$\Delta_{k_0 k(t)} \leq \sum_{j=1}^{n(t)-1} (c_1(t_j - t_{j-1}) + c_2) + c_1(t - t_{n(t)-1}) + c_2$$
$$\leq c_1 t + n(t)\, c_2$$
$$\leq c_1 t + \left(\frac{t}{\ell}+1\right) m^2 c_2$$
$$\Delta_{k_0 k(t)} \leq \left(c_1 + \frac{m^2 c_2}{\ell}\right) t + m^2 c_2$$

ce qui prouve le lemme 3.1.4 et achève la démonstration du théorème 3.1.

CQFD

3.2 Cas local II

La situation envisagée ici est celle de la section 1.4. On a le Théorème analogue du Théorème 3.1 :

Théorème :

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0, $\pi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application analytique vérifiant $\pi(0) = 0$ et $\tilde{Y}$ une hypersurface analytique de U.

Faisons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H) Il existe une stratification de Whitney $\{A_\alpha\}_\alpha$ de la paire $(U, \tilde{Y})$ telle que, si $\beta : U' \longrightarrow U$ désigne la désingularisation de $\tilde{Y}$ dans U, les " images inverses " des strates A_α s'envoient submersivement sur ces strates A_α, ie il existe une nouvelle stratification $\{\tilde{A}_\gamma\}_\gamma$ de la paire $(U', \beta^{-1}(\tilde{Y}))$ telle que pour tout γ il existe α tels que l'application $\beta|_{\tilde{A}_\gamma} : \tilde{A}_\gamma \longrightarrow A_\alpha$ soit une submersion.

Il existe une boule fermée $\bar{X}$ de U de centre 0 et d'intérieur X, et un disque ouvert D de $\mathbb{C}$ de centre 0 tels que, si l'on note $Y = \tilde{Y} \cap X$, $X^* = X \setminus Y$, $U^* = U \setminus \tilde{Y}$, $D^* = D \setminus \{0\}$, $q : \tilde{U}^* \longrightarrow U^*$ le revêtement universel de U^* et $\tilde{X}^*_{D^*} = q^{-1}(X^*) \cap (\pi \circ q)^{-1}(D^*)$, et si :

ω désigne une p-forme différentielle multiforme relative et fermée sur U^* (ie d'après 1.3.3 la donnée d'une p-forme holomorphe $\tilde{\omega}$ relative et fermée sur $\tilde{U}^*$)

$\tilde{h}$ représente une section locale du faisceau $H_p(\tilde{X}^*_{D^*} / D^*)$

Alors :

Si ω est de classe de Nilsson sur U^*, l'intégrale

$$f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega}$$

définit une fonction de classe de Nilsson sur D^*.

preuve :

Le raisonnement de la section 3.1 s'applique moyennant de petites précautions visant à assurer que l'on peut encore supposer que le champ de vecteurs Ξ est à support compact.

<u>1re étape : Réduction au cas où $\tilde{Y}$ est à Croisements Normaux et où $\pi^{-1}(0) \subset \tilde{Y}$.</u>

Quitte à rajouter de nouvelles composantes à l'hypersurface $\tilde{Y}$, on peut toujours supposer que $\pi^{-1}(0) \subset \tilde{Y}$.
Dans un premier temps, choisissons les boules $\bar{X}$ et D comme au lemme 1.4.1.
$\beta : U' \longrightarrow U$ est une application analytique propre entre 2 variétés analytiques complexes, $Y' \doteq \beta^{-1}(\tilde{Y})$ est un diviseur à croisements normaux dans U' et β induit un isomorphisme analytique de $U' \setminus Y'$ sur $U \setminus \tilde{Y}$.
Notons $\pi' = \pi \circ \beta : U' \longrightarrow \mathbb{C}$.

On peut facilement écrire notre intégrale $f(t)$ avec les données plus sympathiques (U', Y') :

$$f(t) = \int_{\tilde{h}(t)} \tilde{\omega} = \int_{h(t)} \omega$$

puisque localement $q^*\omega = \tilde{\omega}$, $\omega \in \Omega^p_{Ho}(U^*/D)$ et où $t \mapsto h(t) \doteq q_* \tilde{h}(t)$ représente une section multiforme du faisceau $H_p(X^*_{D^*}/D^*)$ où $X^*_{D^*} = (X \setminus Y) \cap \pi^{-1}(D^*)$.

En posant $X' = \beta^{-1}(X)$, $X'^* = X' \setminus Y'$, $h'(t) \doteq (\beta^{-1})_* (h(t)) \in H_p(X'^*_t)$ et $\omega' = \beta^* \omega$ on obtient :

$$f(t) = \int_{\beta_*(h'(t))} \omega = \int_{h'(t)} \omega'$$

$\omega' \in \Omega^p_{Ho}(U'^*/D)$ est formée de détermination finie et à croissance modérée le long de Y' (d'après la proposition 2.3.1, compte tenu de $\beta(Y') \subset Y$ et du fait que ω soit multiforme sur $X^* = X \setminus Y$ à croissance modérée le long de Y).

2° étape : Construction du champ de vecteurs ξ

On construit le champ de vecteur ξ sur U' de la même façon qu'à la section 3.1.

Le problème crucial est, ici, de savoir si l'on peut toujours se ramener à un champ ξ à support compact quitte à multiplier ξ par une fonction C^∞ convenable.

C'est l'hypothèse (H) qui nous permet de construire un champ ξ sur un voisinage ouvert du compact $\pi'^{-1}(\bar{D}_1) \cap \beta^{-1}(\bar{X})$ (où D_1 est un disque de centre 0 strictement inclus dans D) tel que ξ soit tangent à Y' (facile, puisque Y' est à croisements normaux), qui se projette sur le champ $\zeta = -r\frac{\partial}{\partial r}$ de D et qui soit, de plus, tangent à l'image inverse $\beta^{-1}(\partial X)$ du bord ∂X de $\bar{X}$ par β.

En effet : notons $\{A_\alpha\}$ la stratification de Whitney de la paire $(U, \check{Y})$ qui vérifie la condition (H).

Quitte à prendre une boule X plus petite, on peut toujours supposer que :

$$(1) \qquad A_\alpha \pitchfork \partial X \qquad \text{pour toute strate } A_\alpha$$

Montrons (1) : Remarquons bien qu'il n'y a qu'un nombre fini de strates A_α qui rencontre X pour X assez petite et que l'on peut toujours supposer, quitte à diminuer encore X, que toute strate A_α qui intercepte X vérifie $0 \in \bar{A}_\alpha$.

$d(z) \doteq |z|^2$ définit une équation analytique réelle globale du bord ∂X dans U. Le lemme des petits chemins ([MIL] § 3.1) montre facilement que :

$$d\Big|_{A_\alpha \cap X_1 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2})} : A_\alpha \cap X_1 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2}) \longrightarrow D^*_{\eta^2}$$

est une submersion, pourvu que X_1 soit une boule ouverte de U de centre 0 et de rayon suffisamment petit et que $D^*_{\eta^2} \doteq \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < \eta^2\}$ soit de rayon η^2 suffisamment petit devant le rayon de X_1 (voir aussi l'appendice, lemme 1).

Appelons : $d : X_1 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Le lemme T qui suit montre que pour toute boule X de U de centre 0 et de rayon $\varepsilon < \eta$ incluse dans X_1, on a :

$$d^{-1}(\mathcal{E}^2) = \partial X \cap X_1 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2}) \pitchfork A_\alpha \cap X_1 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2})$$

ie $\partial X \pitchfork A_\alpha$ puisque $X_1 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2})$ est un ouvert contenant ∂X.

<u>lemme T</u> : Si $f : M \longrightarrow N$ est une application de classe C^∞ entre 2 variétés différentielles C^∞ et si A est une sous-variété de M ne contenant pas de points critiques de $f : M \longrightarrow N$, alors $f|_A : A \longrightarrow N$ est une submersion si et seulement si $f^{-1}(t) \pitchfork A$ pour tout $t \in f(A)$.

L'hypothèse (H) faite sur la stratification $\{A_\alpha\}$ montre alors facilement que toute strate $\tilde{A}_\gamma$ de U' est transverse à $\beta^{-1}(\partial X)$:

$d' = d \circ \beta$ définit une équation analytique réelle de $\beta^{-1}(\partial X)$ et avec les notations précédentes,

$$d'|_{\tilde{A}_\gamma \cap \beta^{-1}(X_1) \cap d'^{-1}(D^*_{\eta^2})}$$

est une submersion comme composée des 2 submersions :

$$\tilde{A}_\gamma \cap \beta^{-1}(X_1) \cap d'^{-1}(D^*_{\eta^2}) \xrightarrow{\beta} A_\alpha \cap X_1 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2}) \xrightarrow{d} D^*_{\eta^2}$$

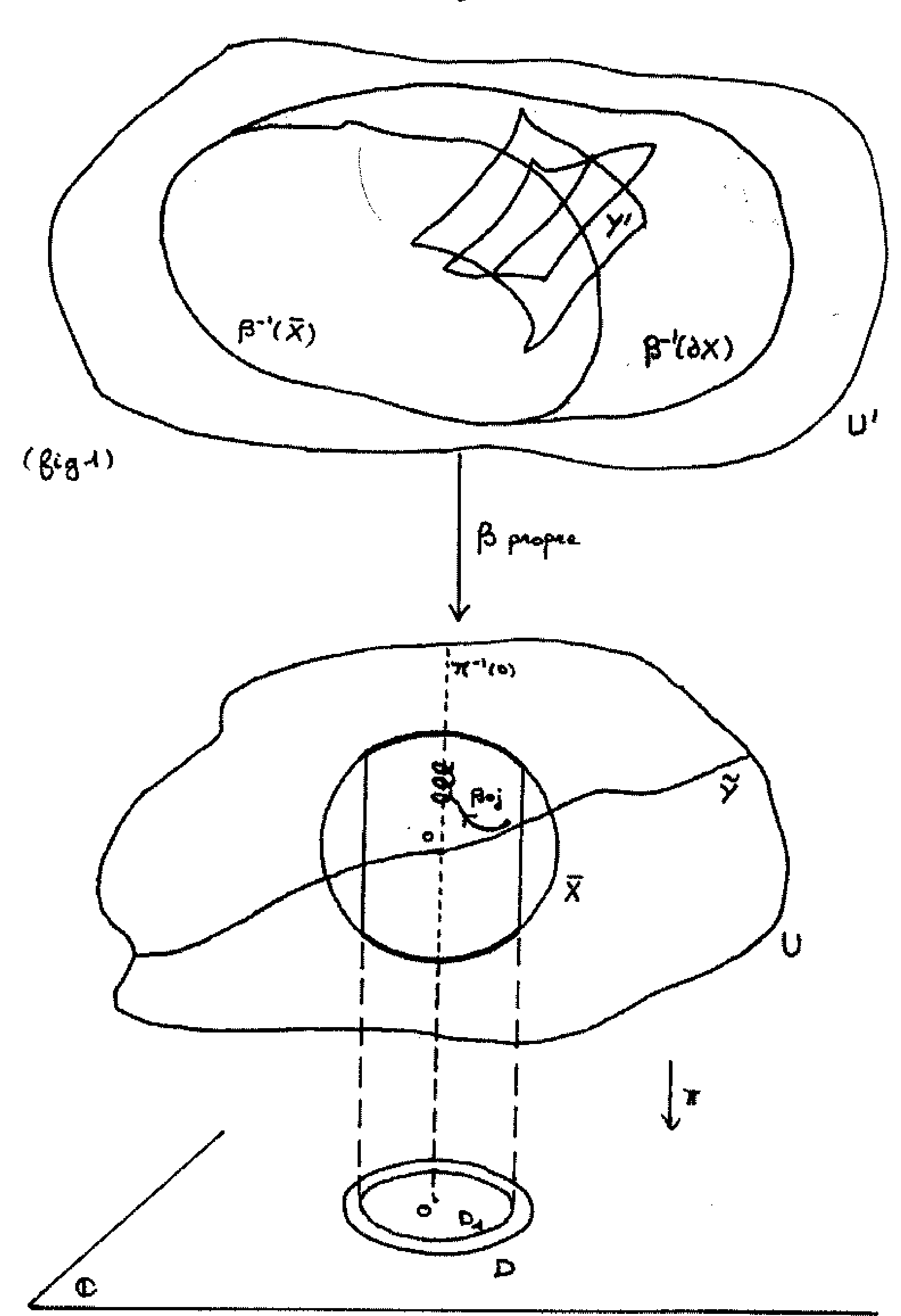
d'où (cf lemme T) :

$$\tilde{A}_\gamma \cap \beta^{-1}(X_1) \cap d'^{-1}(D^*_{\eta^2}) \pitchfork d'^{-1}(\mathcal{E}^2)$$

où $d'^{-1}(\mathcal{E}^2) = \beta^{-1}(\partial X)$, donc :

$$(2) \qquad \tilde{A}_\gamma \pitchfork \beta^{-1}(\partial X)$$

(2) signifie que l'hypersurface Y' de U' est transverse à l'image inverse $\beta^{-1}(\partial X)$, de sorte que le champ Ξ puisse être construit tangent à la fois à Y' et à $\beta^{-1}(\partial X)$, comme nous allons le voir.



(fig. 2) : La courbe $\beta \circ j$ qui tourne autour des composantes $\pi^{-1}(0)$ de $\tilde{y}$ est l'image d'une courbe intégrale j de $\mathcal{F}$ débutant dans le compact $K = \pi'^{-1}(\bar{D}_1) \cap \beta^{-1}(\bar{X})$. Cette courbe reste dans K par construction.

Construction du champ Ξ (sur un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ du compact $\pi'^{-1}(\overline{D}_1) \cap \beta^{-1}(\overline{X}) \doteq K$ de U') :

On construit localement les champs Ξ_W sur des cartes W convenables de U':

α) Si $x \in \mathcal{W} \setminus (\beta^{-1}(\partial X) \cup Y')$, on peut supposer que π' est une submersion au voisinage de x (quitte à restreindre D_1 et X de sorte que $\pi|_{X \cap \pi^{-1}(D_1^*)}$ soit une submersion) .
Soit W une carte en x ne rencontrant pas $\beta^{-1}(\partial X) \cup Y'$ et telle que $\pi(z) = z_1$ (cf. Théorème du rang) .
On pose :

$$\Xi_W = -\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \overline{z}_1 \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} \right)$$

β) Si $x \in \mathcal{W} \cap (Y' \setminus \beta^{-1}(\partial X))$, on choisit une carte W en x dont les coordonnées locales vérifient :

$$\begin{cases} Y' \cap W : & z_1 \cdots z_p = 0 \\ \pi'(z) = z_1^{a_1} \cdots z_m^{a_m} & \quad a_1 \in \mathbb{N}^* \quad a_i \in \mathbb{N} \\ & \quad 1 \leq m \leq p \leq n = \dim_{\mathbb{C}} U' \end{cases}$$

(C'est possible d'après le Théorème des zéros de Hilbert et puisque $\pi'^{-1}(0) \subset Y'$. Voir la 2ème étape du Théorème 3.1)

On pose :
$$\Xi_W = -\frac{1}{a_1}\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \overline{z}_1 \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} \right)$$

γ) Si $x \in \mathcal{W} \cap Y' \cap \beta^{-1}(\partial X)$, on choisit une carte W en x telle que :

$$\begin{cases} Y' \cap W : & z_1 \cdots z_p = 0 \\ \pi'(z) = z_1^{a_1} \cdots z_m^{a_m} \end{cases}$$

dans les coordonnées locales .

$z_1 = 0 , \ldots , z_p = 0$ sont des équations indépendantes de Y' dans W .
Notons $z_j = x_j + i y_j$.

On a vu ci-dessus que l'hypothèse (H) impliquait :

$$Y' \pitchfork \beta^{-1}(\partial X)$$

de sorte que l'on puisse toujours compléter le système de coordonnées C^∞ $(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p)$ par $(u_{p+1}, v_{p+1}, \ldots, u_n, v_n)$ où u_{p+1} désigne une équation C^∞ de $\beta^{-1}(\partial X)$.

Dans le nouveau système de coordonnées $(x_1, \ldots, y_p, u_{p+1}, \ldots, v_n)$ on aura :

$$W \cap \beta^{-1}(\partial X) \quad : \quad u_{p+1} = 0$$

$$W \cap \beta^{-1}(\partial X) \cap Y' \; : \quad z_1 \cdots z_p = u_{p+1} = 0$$

On pose $\Xi_W = -\frac{1}{q_1}\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right)$

Il est clair que Ξ_W est tangent à Y' et à $\beta^{-1}(\partial X)$, et se projette sur Ξ.

δ) <u>Si $x \in W \cap (\beta^{-1}(\partial X) \setminus Y')$</u> , comme on n'est pas sur $Y' \supset \pi'^{-1}(0)$ on peut supposer que π' est un submersion au voisinage de x (cf cas α)) et choisir une carte W n'interceptant pas Y' et telle que $\pi'(z) = z_1$.

Le lemme des petits chemins en "version analytique" ([MIL] lemme 3.1) montre que l'on peut toujours supposer que :

$$\pi^{-1}(t) \pitchfork \partial X$$

pour tout $t \in D^*$, pourvu que X soit assez petite et que D soit suffisamment petite devant le rayon de X.

On peut donc compléter le système de coordonnées (x_1, y_1) par $(u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n)$ où u_2 est une équation C^∞ du bord ∂X.

Le champ $\Xi_W = -\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right)$ convient alors.

(NB : W n'intercepte pas Y' donc β induit un isomorphisme de W sur $\beta(W)$ et l'on a exprimé Ξ_W ci-dessus avec des coordonnées de $\beta(W)$)

Conclusion :

On recolle les champs Ξ_W décrits précédemment grâce à une partition différentiable de l'unité. On obtient un champ Ξ de classe C^∞, défini sur un voisinage $\mathcal{U}$ du compact $K = \pi'^{-1}(\overline{D}_1) \cap \beta^{-1}(\overline{X})$.
Il suffit alors de constater que :

1) Seuls les points voisins de O dans D nous intéressent pour montrer la croissance modérée de f le long de O. On considère-ra donc $\pi'^{-1}(D_1)$.

2) Seuls les points de X (au dessus de D_1) nous intéressent dans U, puisque les symboles $h(t)$ désignent des classes d'homologie de X_t^*, $t \in D_1$.

3) En multipliant le champ Ξ par une fonction C^∞ à support compact, notée Ψ, valant 1 sur le compact K et 0 en dehors d'un voisinage (par exemple $\mathcal{U}$) de ce compact, on obtient un champ $\Psi\Xi$ à support compact dans U' qui suffit à la description de notre problème :
En effet, comme Ξ est tangent au "bord" $\beta^{-1}(\partial X) \cap \pi'^{-1}(D_1)$ par construction, toute courbe intégrale γ de $\Psi\Xi$ débutant dans $\pi'^{-1}(D_1) \cap \beta^{-1}(X)$ restera nécessairement dans cet ensemble quand son paramétrage tend vers $+\infty$. (On rappelle que Ξ se projettant par construction sur le champ radial centripète $\xi = -r\frac{\partial}{\partial r}$, γ ne peut pas sortir du compact $K = \pi'^{-1}(\overline{D}_1) \cap \beta^{-1}(\overline{X})$ par "les côtés" ; voir (fig.2)).

3e étape : On peut toujours supposer que la triangulation (K, L) et le recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ sont finis parceque le compact $\pi'^{-1}(\overline{D}_1) \cap \beta^{-1}(\overline{X})$ est le seul à nous intéresser.

4e étape : Sans transformation.

CQFD

3.3 Cas local III

Nous voulons maintenant travailler dans le cas local à la source et en prenant des classes d'homologie relatives :

Fixons les notations suivantes pour toute la section 3.3 :

U ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0
$\pi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique et $\pi(0) = 0$
$\bar{X}$ boule fermée de centre 0 incluse dans U, d'intérieur X et de bord ∂X.
$\tilde{Y}$ hypersurface analytique de U

On note $\bar{X}^* = \bar{X} \setminus \tilde{Y}$, $X^* = X \setminus \tilde{Y}$ et $\partial X^* = \partial X \setminus \tilde{Y}$.
On choisit les boules $\bar{X}$ et D comme au lemme 1.4.1, ie telles que les applications $\pi : X \setminus Y \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^* = D \setminus \{0\}$ et $\pi : \partial X \setminus \tilde{Y} \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^*$ soient des fibrations topologiques localement triviales.

Le faisceau $H_p(\bar{X}^* \cap \pi^{-1}(D^*), \partial X^* \cap \pi^{-1}(D^*) / D^*)$ est bien défini (cf § 0.1 et l'appendice : le lemme 2 et la remarque 1).

Soit h une section locale de ce faisceau. Cela signifie que $h(t) \in H_p(\bar{X}^*_t, \partial X^*_t)$ est une classe d'homologie relative dépendant continûment de t pour t variant dans D^*.
Si ω désigne une p-forme différentielle holomorphe relative et fermée sur $U^* = U \setminus \tilde{Y}$, l'intégrale $\int_{h(t)} \omega$ dépend du choix du représentant de la classe $h(t)$ et ne permet pas, en général, de définir une fonction analytique multiforme.

Dans le cas particulier suivant, les données ω et $h(t)$ définissent une microfonction à l'origine de $\mathbb{C}$ que l'on notera $f(t) = \int_{h(t)} \omega$ abusivement.
Pour le montrer, il faudra d'abord choisir des représentants convenables de $\delta h(t)$ ($\delta h(t)$ représente le cobord de Leray de $h(t)$) dont le bord est fixe, puis intégrer seulement sur ces représentants. Ensuite, il faudra vérifier que 2 tels représentants définissent la même microfonction en 0.

3.3.1 Proposition ([MA1])

Avec les notations précédentes et si :

0 est une singularité isolée de π,

ω désigne une p-forme différentielle relative holomorphe et fermée sur U,

h représente une section locale du faisceau

$$H_p(\overline{X}^* \cap \pi^{-1}(D^*), \partial X^* \cap \pi^{-1}(D^*) / D^*)$$

Alors ces données définissent un germe de microfonction à l'origine dans $\mathbb{C}$, germe que l'on note $f(t) = \int_{h(t)} \omega$.

preuve :

Le cobord de Leray donne le morphisme :

$$\begin{array}{cccc} \delta : & H_p(\overline{X}_t, \partial X_t) & \longrightarrow & H_{p+1}(\overline{X} \setminus \overline{X}_t, \partial X \setminus \overline{X}_t) \\ & h(t) & \longrightarrow & \delta h(t) \end{array}$$

Pour donner un sens à l'intégrale $\int_{\delta h(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi}$, il faudra intégrer $\frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi}$ seulement sur des représentants convenables $\gamma(t)$ de la classe $\delta h(t)$:

<u>lemme</u> : On peut représenter $\delta h(t)$ par un cycle relatif $\gamma(t)$ dans $\overline{X} \setminus \overline{X}_t$ qui dépend continûment de t et dont le bord $\partial \gamma(t) = \sigma$ est un cycle de $\partial X \setminus \pi^{-1}(D)$ indépendant de t.

preuve :

Pour tout $t \in D^*$, $\partial X \setminus \overline{X}_t$ se rétracte par déformation sur $\partial X \setminus \pi^{-1}(D)$, d'où l'isomorphisme :

$$H_p(\partial X \setminus \overline{X}_t) \simeq H_p(\partial X \setminus \pi^{-1}(D))$$

Cela montre que toute classe d'homologie $\tilde{h}(t)$ de $\partial X \setminus \overline{X}_t$ dépendant continûment de t s'exprimera $\tilde{h}(t) = [\sigma]$ où σ est un cycle constant de $\partial X \setminus \pi^{-1}(D)$ qui évite toutes les fibres $\overline{X}_t$ pour $t \in D$.

Notons, à priori :

$$\delta h(t) = [\Gamma(t)] \quad \text{où } \partial\Gamma(t) \in Z_p(\partial X \setminus \overline{X}_t)$$

D'après la remarque précédente, on a :

$$[\partial\Gamma(t)] = [\sigma] \quad \text{dans } H_p(\partial X \setminus \overline{X}_t)$$

où σ est un cycle de $\partial X \setminus \pi^{-1}(D)$ indépendant de t, donc :

$$\partial\Gamma(t) = \sigma + \partial\tau(t)$$

où $\tau(t)$ est une chaine de $\partial X \setminus \overline{X}_t$ dépendant continûment de t.

Il suffit de choisir le cycle relatif $\gamma(t) \doteq \Gamma(t) - \tau(t)$ pour conclure.

CQFD

On choisira toujours de tels représentants $\gamma(t)$ de $\delta h(t)$ pour calculer notre intégrale. Alors :

1) $\displaystyle\int_{\gamma(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi}$ <u>définit une fonction analytique sur $D \setminus K$ où K est une coupure</u>.

Le cycle relatif $\gamma(t)$ dépend continûment de t, donc pour t voisin de t_0 :

$$[\gamma(t)] = [\gamma(t_0)] \in H_{p+1}(\overline{X} \setminus \overline{X}_t, \partial X \setminus \overline{X}_t)$$

i.e. : $\gamma(t) - \gamma(t_0) = \partial u + \rho(t)$

où $u \in C_{p+2}(\overline{X} \setminus \overline{X}_t)$ et $\rho(t) \in C_{p+1}(\partial X \setminus \overline{X}_t)$

Alors $\partial\gamma(t) - \partial\gamma(t_0) = \partial\rho(t) \Rightarrow \partial\rho(t) = 0$ (puisque $\partial\gamma(t) = \partial\gamma(t_0) = \sigma$ d'après le choix de $\gamma(t)$). Ainsi $\rho(t)$ est un cycle de $\partial X \setminus \overline{X}_t$ dépendant continûment de t.

Compte tenu de la déformation-rétraction :

$$\partial X \setminus \overline{X}_t \underset{i}{\overset{r}{\rightleftarrows}} \partial X \setminus \pi^{-1}(D)$$

on a, comme au lemme précédent :

$$[\rho(t)] = [\rho] \quad \text{dans } H_{p+1}(\partial X \setminus \overline{X}_t)$$

où ρ est un cycle constant de $\partial X \setminus \pi^{-1}(D)$.

Finalement :

$$\int_{\gamma(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi} = \int_{\gamma(t_0)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi} + \int_{\rho} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi}$$

ce qui prouve que la fonction $t \longmapsto \int_{\gamma(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi}$ est analytique sur $D \setminus K$ et définit un germe de microfonction à l'origine.

Pour pouvoir définir la microfonction $f(t) = \int_{\gamma(t)} \omega$ par l'égalité :
$$\int_{h(t)} \omega = \left[\frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi} \right]$$

il faut vérifier que :

2) <u>la microfonction</u> $\left[\int_{\gamma(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi} \right]$ <u>est indépendante du choix du cycle $\gamma(t)$ dans le lemme</u>.

Soit $\gamma'(t)$ un autre cycle relatif de $\bar{X} \setminus \bar{X}_t$ dépendant continûment de t, représentant la classe $\delta h(t)$ et dont le bord $\partial\gamma'(t)$ est fixe dans $\partial X \setminus \pi^{-1}(D) \subset \partial X \setminus \bar{X}_t$.
On a :
$$[\gamma(t)] = [\gamma'(t)] \text{ dans } H_{p+1}(\bar{X} \setminus \bar{X}_t , \partial X \setminus \bar{X}_t)$$

ie :
$$\gamma(t) - \gamma'(t) = \mu(t) + \partial \nu(t)$$

où $\mu(t) \in C_{p+1}(\partial X \setminus \bar{X}_t)$ et $\nu(t) \in C_{p+2}(\bar{X} \setminus \bar{X}_t)$

On a :
$$\int_{\gamma(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi} - \int_{\gamma'(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi} = \int_{\mu(t)} \frac{\omega \wedge d\pi}{t-\pi}$$

Les cycles constants $\partial\gamma(t) = \sigma$ et $\partial\gamma'(t) = \sigma'$ sont dans $\partial X \setminus \pi^{-1}(D)$ et, pour tout $t \in D$, $\partial X \setminus \pi^{-1}(D)$ est une rétracte par déformation de $\partial X \setminus \bar{X}_t$.
Notons :
$$\partial X \setminus \pi^{-1}(D) \underset{r}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \partial X \setminus \bar{X}_t$$

et i_* l'isomorphisme induit par i entre les groupes d'homologie.

BIBLIOGRAPHIE :

[BJO] Björk J-E : Rings of differential operators, North-Holland Mathematical Library, vol. 21, 1979.

[BJO 2] Björk J-E : Nilsson's work on multiple integrals, Notes préprint, Stockholm, 1979.

[DEL] Deligne P. : Equations différentielles à points singuliers réguliers, Springer-Verlag, n° 163, LNM 1970

[FAT] Del Fattore F. & Mercier D-J : Fonctions de classe de Nilsson, mémoire de DEA, Nice, 1982.

[FOR] Forster O. : Riemannsche flächen, Springer-Verlag, n° 184.

[GRE] Greenberg M. : Lectures on algebraic topology, mat. lect. notes series, 1967

[GRI] Griffiths P.A : Monodromy of homology and periods of integrals on algebraic manifolds, Notes miméographiées, Princeton University, 1968.

[HEL] Helgason : Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, 1978.

[HIR 1] Hironaka H. : Ensembles sous-analytiques, Singularités à Cargèse, SMF 1973.

[HIR 2] Hironaka H. : Introduction to real analytic spaces and real analytic maps, Pisa, 1973.

[HIR 3] Hironaka H. : Subanalytic sets ; Number Theory, algebraic geometry and commutative algebra, volume in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya (pub.), 1973.

[HIR 4] Hironaka H. : Bimeromorphic smoothing of complex analytic space, Acta Mathematica Vietnamica, tome 2 n° 2, 1977.

[HIR 5] Hironaka H. : Triangulation of algebraic sets, Proceeding of Symposia, volume 29, 1975, AMS.

[HWA] Hwa & Teplitz : Homology and Feynmann integrals, 1966

[LAN] Lang S. : Introduction to differentiable manifolds, 1962.

[LDT] Lê Dũng Tráng : Some remarks on relative monodromy, 1976, in "Real and complex singularities" Nordic Summer School, Oslo 1976, Sijthoff and Nordhoff 1977.

[LEF] Lefschetz S. : L'analysis situs et la géométrie algébrique, Paris, 1924.

[LER] Leray J. : Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), Bull. S.M.F., 87, 1959, p 81 à 180.

[LOJ] Lojasiewicz S. : Triangulation of semi-analytic sets, annali Scu. Norm. Sup. Pisa, Sc. Fis. Mat. Ser. 3, v 18, fasc. 4, 1964, p 449 à 474.

[MAI] Maisonobe P. & Rombaldi : Solutions du système de Gauss-Manin d'un germe de fonction à point critique isolé, dans [PHA 2].

[MAL] Malgrange B. : Intégrales asymptotiques et monodromie, annales sc. de l'E.N.S., t7, 1974.

[MATH] Mather J. : Notes on topological stability, Harvard University, 1970.

[MAT] Matsushima : Differentiable manifolds, Marcel Dekker inc., 1972.

[MIL] Milnor J. : Singular points of complex hypersurfaces, Princeton University Press, 1968.

[NIL 1] Nilsson N. : Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds, Arkiv för Matematik Band 5 nr 32 p 463, 1964.

[NIL 2] Nilsson N. : Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals, Arkiv för Matematik, 1979

[PHA] Pham F. : Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau, Mémorial des sci. math., Gauthier-Villars, 1967.

[PHA 2] Pham F. : Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Progress in Math. vol 2, Birkhaüser, 1979.

[PHA 3] Pham F. : Thèse

[PHA 4] Pham F. : Intégrales singulières et microfonctions, Acta Scientiarum Vietnamicarum, 1974.

[PIC] Picard E. & Simart P. : Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, tome 1, Paris, 1897.

[SPA] Spannier : Algebraic topology, Mac graw Hill, 1971.

[VER] Verdier J-L : Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones Math. 36, 295-312, 1976.

[WAS] Wasow W. : Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publishers, 1965.

[WOL] Wolf J. A : Differentiable fibre spaces and mappings compatible with riemannian metrics, Michigan Math. Journal, 11, n° 1, 1964.

Appendice : **Le Théorème de fibration d'après Lê Dũng Tráng.**

Dans [LDT], Lê généralise le Théorème de fibration de Milnor ([MIL]) au cas où π est une fonction analytique définie sur un sous-ensemble analytique de l'ouvert U de $\mathbb{C}^n$.

On se propose ici de détailler la démonstration de ce Théorème dans le cas précis qui nous intéresse.

Théorème de Fibration :

Soient $Y \subset U \subset \mathbb{C}^n$ un sous-ensemble analytique de l'ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et $\pi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application analytique. On suppose que $0 \in U$ et que $\pi(0) = 0$.
Il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, η petit devant ε, tels que si $\bar{X}$ désigne la boule fermée de U de centre 0 et de rayon ε et si D^* désigne le disque ouvert épointé $\{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < \eta\}$, les applications :

$$\begin{cases} \pi : \bar{X} \cap Y \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^* & (1) \\ \text{et} \\ \pi : X \setminus Y \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^* & (2) \end{cases}$$

sont des fibrations topologiques localement triviales.

Avant d'aborder la preuve de ce Théorème, citons les trois résultats suivants :

1- Théorème d'isotopie de Thom-Mather ([MATH])

Soient M un espace analytique complexe et $\{A_\alpha\}_\alpha$ une stratification de Whitney de M. Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application analytique telle que :

1) φ soit propre

2) $\varphi|_{A_\alpha} : A_\alpha \longrightarrow N$ soit une submersion pour chaque strate A_α.

Alors φ est une fibration topologique localement triviale.

Lemme des petits chemins ([MIL], §3.1)

Soient $V \subset \mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) un sous-ensemble analytique complexe (resp. réel), $U = \mathbb{C}^n \setminus g^{-1}(0)$ (resp. $\mathbb{R}^n \setminus g^{-1}(0)$) où g est une fonction analytique complexe (resp. réelle) et x un point d'accumulation de $U \cap V$.

Alors il existe un petit chemin analytique réel

$$p : [0, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{C}^n \text{ (resp. } \mathbb{R}^n)$$

qui vérifie :

$$\begin{cases} p(0) = x \\ p(t) \in U \cap V \text{ pour tout } t > 0 . \end{cases}$$

Lemme de Transversalité :

Si $f : M \longrightarrow N$ désigne une application différentiable entre deux variétés différentielles réelles et si A est une sous-variété de M ne contenant pas de points critiques de f, alors $f|_A : A \longrightarrow N$ est une submersion si et seulement si pour tout $t \in f(A)$ on a : $f^{-1}(t) \pitchfork A$.

La démonstration de ce dernier lemme est élémentaire. Nous sommes maintenant prêts pour démontrer le Théorème de Fibration.

preuve du Théorème de Fibration :

Soit $\{A_\alpha\}_\alpha$ une stratification de Whitney de la paire (U, Y) qui vérifie la condition A_π de Thom et telle que $\pi^{-1}(0)$ soit une réunion de strates. Une telle stratification existe ([THO], [HIR 6])

Si ε est petit, la boule $\overline{X}$ ne rencontre qu'un nombre fini $A_1, \ldots, A_k$ de strates et l'on peut toujours supposer, quitte à diminuer ε, que $0 \in \overline{A}_\alpha$ pour $1 \leq \alpha \leq k$.
Notons X l'intérieur de $\overline{X}$ et ∂X son bord.

L'application induite :

$$\pi : Y \cap \overline{X} \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^* \qquad (1)$$

est propre et définie sur un ensemble stratifié. La stratification de $Y \cap \overline{X} \cap \pi^{-1}(D^*)$ est d'ailleurs induite par la stratification suivante de $Y \cap \overline{X}$:

$Y \cap \overline{X}$ est stratifié par les ensembles $\begin{cases} A_\alpha \cap X = \text{strates complexes} \\ A_\alpha \cap \partial X = \text{strates réelles} \end{cases}$

$A_\alpha \cap X$ est manifestement une variété analytique complexe, et le lemme 1 montre que $A_\alpha \cap \partial X$ est un variété analytique réelle :

<u>lemme 1</u> :

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la sphère ∂X coupe transversalement chacune des strates A_α $(1 \leq \alpha \leq k)$

preuve : $d(z) = \|z\|^2$ définit une équation analytique réelle globale de ∂X.
Le lemme des petits chemins (ou encore : voir lemme 2) montre l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ et de $\eta > 0$, η petit devant ε_0 telsque si X_0 désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε_0 dans U et si $D^*_{\eta^2} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |z| < \eta^2\}$, l'application :

$$d\Big|_{A_\alpha \cap X_0 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2})} : A_\alpha \cap X_0 \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2}) \longrightarrow D^*_{\eta^2}$$

soit une submersion.
Le lemme de transversalité (que l'on peut appliquer puisque l'ensemble $A_\alpha \cap X_o \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2})$ ne contient pas de points critiques de d, le seul point critique de d étant 0) montre alors que si $0 < \varepsilon < \text{Inf}(\varepsilon_o, \eta)$ on a :

$$d^{-1}(\varepsilon^2) = \partial X \cap X_o \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2}) \pitchfork A_\alpha \cap X_o \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2})$$

ie $\partial X \pitchfork A_\alpha$ puisque $X_o \cap d^{-1}(D^*_{\eta^2})$ est un ouvert contenant ∂X.

CQFD

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Thom-Mather à l'application (1), il suffit de vérifier que π induit une submersion sur chacune des strates de $Y \cap \overline{X} \cap \pi^{-1}(D^*)$:

* $\pi|_{A_\alpha \cap \partial X \cap \pi^{-1}(D^*)}$ est une submersion (surjective) sur les strates réelles $A_\alpha \cap \partial X \cap \pi^{-1}(D^*)$ d'après la condition A_π de Thom. En effet, cette condition énonce que $\pi^{-1}(t) \cap A_\alpha$ est transverse à ∂X, et le lemme de transversalité permet de conclure.

* $\pi|_{A_\alpha \cap X \cap \pi^{-1}(D^*)}$ est une submersion (surjective) sur les strates complexes $A_\alpha \cap X \cap \pi^{-1}(D^*)$ pour $1 \leq \alpha \leq k$ d'après le lemme 2 suivant :

<u>lemme 2</u> :

On peut trouver X de rayon ε assez petit et D de rayon η petit devant ε telles que $\pi|_{A_\alpha \cap X}$ n'ait pas de valeurs critiques dans D^*.

preuve : On <u>raisonne par l'absurde</u>. Supposons que $0 \in \overline{A}_\alpha$ vérifie $0 \in \overline{C(\pi|_{A_\alpha}) \setminus \pi^{-1}(0)}$ pour un indice $\alpha \in [1, k]$, où $C(\pi|_{A_\alpha})$ désigne l'ensemble des points critiques de $\pi|_{A_\alpha}$.
Le lemme des petits chemins montre l'existence d'un chemin analytique réel $p : [0, r[\longrightarrow \overline{A}_\alpha$ tel que $p(0) = 0$ et $p(t) \in C(\pi|_{A_\alpha}) \setminus \pi^{-1}(0)$ pour tout $t > 0$.
Mais alors $d(\pi \circ p)(t) = 0$ donc $f \circ p$ est une constante, donc $\pi \circ p(t) = \pi(0) = 0$ pour tout t ce qui implique que

$p([0,1[) \subset \pi^{-1}(0)$. C'est absurde .

CQFD

<u>Conclusion</u> :

Le 1-Théorème d'isotopie de Thom-Mather montre que l'application (1) est une fibration topologique localement triviale.

En recommençant le travail ci-dessus avec l'application

$$\pi : \quad \overline{X} \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^* \qquad (1')$$

au lieu de (1), on obtient encore une fibration triviale. De plus la trivialisation de (1') respectera les strates A_α, donc respectera nécessairement Y, le bord ∂X et $X \setminus Y$. (Rappelons nous bien que la stratification $\{A_\alpha\}_\alpha$ de U a été choisie compatible avec Y)
Le Théorème de fibration s'en déduit.

CQFD

Nous avons pris la peine d'énoncer certains résultats et de fixer les notations, aussi profitons en pour faire deux remarques intéressantes :

<u>Remarque 1</u> : Une démonstration en tout point analogue à celle du lemme 2 donne le Théorème du type Bertini qui suit.
On remarquera que l'on s'est placé dans les hypothèses de ce Théorème pour obtenir une submersion

$$\pi : X^* \cap \pi^{-1}(D^*) \longrightarrow D^*$$

et, de ce fait, pour pouvoir parler du faisceau d'homologie $H_p(X^* \cap \pi^{-1}(D^*) / D^*)$ dans le cas local II (cf Proposition 1.4.2)

Théorème du type Bertini :

Soient M une sous-variété analytique de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) et $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) une application analytique. Soit $x \in M$ tel que $f(x) = 0$.
Il existe alors une boule ouverte X de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) telle que $M \cap X \setminus f^{-1}(0)$ ne contienne pas de points critiques de f.

Remarque 2 : Avec les seules hypothèses du Théorème de Fibration on peut supposer que $\pi^{-1}(t) \pitchfork \partial X$ pour tout $t \in D^*$. On a, en effet, le lemme suivant :

lemme 3 : Avec les hypothèses du Théorème de Fibration, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ il existe $\eta > 0$, $\eta \ll \varepsilon$, vérifiant pour tout $t \in D^*_\eta = \{ z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < \eta \}$ l'assertion suivante :

$$\pi^{-1}(t) \pitchfork \partial X$$

(où X désigne la boule de U de centre 0 et de rayon ε).

preuve :
On peut supposer que π est une submersion en tout point de $\partial X \cap \pi^{-1}(D^*_\eta)$ d'après le Théorème du type Bertini ci-dessus, de sorte que l'hypothèse " A ne contient pas de points critiques de π " du lemme de transversalité soit vérifiée.
Ainsi $\pi^{-1}(t) \pitchfork \partial X$ pour tout $t \in D^*_\eta$ signifie que l'application $\pi|_{\partial X \cap \pi^{-1}(D^*_\eta)}$ est une submersion.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta < \varepsilon$ l'on puisse trouver une valeur critique de $\pi|_{\partial X}$ dans D^*_η.
On aura alors nécessairement :

(A) : " Il existe un point x_0 de ∂X tel que $\pi(x_0) = 0$ et qui soit un point d'accumulation de l'ensemble des points critiques $C(\pi|_{\partial X})$ de $\pi|_{\partial X}$, et même en fait :

$$x_0 \in \overline{C(\pi|_{\partial X}) \setminus \pi^{-1}(0)} \quad ."$$

Il suffit de vérifier (A) pour conclure par le lemme des petits chemins, comme au lemme 2.

Vérifions donc (A) : Il existe une suite $\{t_k\}_k$ de valeurs critiques de $\pi|\partial X$ telle que $t_k \in D_{\eta_k} \setminus \overline{D}_{\eta_{k+1}}$ où $\{\eta_k\}_k$ désigne une suite strictement décroissante de réels strictement positifs tendant vers 0. Choisissons un point critique de $\pi|\partial X$ au dessus de chaque t_k, et notons le z_k.
La suite infinie $\{z_k\}_k$ possède un point d'accumulation x_0 dans ∂X (car ∂X est compact).
Si $\pi(x_0) \neq 0$, alors $\pi(x_0) \in D_{\eta_k} \setminus \overline{D}_{\eta_{k+1}}$ pour un indice k convenable, ce qui est absurde puisqu'il n'y a qu'un point de la suite $\{z_k\}_k$ dans le voisinage ouvert $\pi^{-1}(D_{\eta_k} \setminus \overline{D}_{\eta_{k+1}})$ de x_0.
Par suite $\pi(x_0) = 0$ et (A) est vérifiée.

CQFD

BIBLIOGRAPHIE pour l'appendice :

[HIR 6] Hironaka H. : Lectures at nordic summer school at Oslo, 1976.

[MATH] Mather J. : Notes on topological stability, Harvard University, 1970.

[MIL] Milnor J. : Singular points of complex hypersurfaces, Princeton University press, 1968.

[THO] Thom R. : Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. A.M.S. 75 (2), 240-284, 1969.